

5. TEMA

NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER (3)

5.1. Fonksiyonların Bileşkesi

5.2. Fonksiyonlarda Dört İşlem

Anahtar Kavramlar

- | | | |
|-----------------------|--------------------------|------------------|
| • artanlık-azalanlık | • fonksiyonun sıfırı | • örtenlik |
| • bileşke fonksiyon | • maksimum-minimum değer | • teklik-çiftlik |
| • bire birlik | • maksimum-minimum nokta | • ters fonksiyon |
| • fonksiyonun işareti | | |

Sembol ve Gösterimler

- | | | |
|--------------------|----------------|--------------------|
| • $(f \circ g)(x)$ | • $(f + g)(x)$ | • $(f \cdot g)(x)$ |
| • $f(g(x))$ | • $(f - g)(x)$ | • $(f / g)(x)$ |

Bu temada sizden

- fonksiyonların bileşkelerine ilişkin muhakemeler yapabilmeniz,
- fonksiyonlarda dört işlem özelliklerini yorumlayabilmeniz

beklenmektedir.

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, araştırma ödevi ve performans görevlerini yerine getirmeniz, ölçme ve değerlendirme sorularını cevaplamanız istenmektedir.



5. Tema karekodu



5. Tema Sunusu'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



Başlarken

Bileşke fonksiyonlar, gerçek yaşamın içinde mühendislikten biyolojiye, ekonomiden sanayiye kadar geniş bir kullanım alanına sahiptir. Bu kavram, birden fazla fonksiyonun kullanıldığı durumlarda bir fonksiyonun görüntü kümesindeki elemanın diğer fonksiyonun tanım kümesinde kullanılması esasına dayanır. Bu sayede bileşke fonksiyonlar, karmaşık sistemleri daha sade ve anlaşılır duruma getirir. Örneğin bir aracın zamana bağlı olarak gittiği mesafeyi gösteren fonksiyon ile aracın katettiği mesafeye göre harcadığı yakıt miktarını gösteren fonksiyonunun art arda işlemler yapılarak incelenmesinde bileşke fonksiyon kullanılır. Fonksiyonlarda dört işlem ise analiz için gerekli fonksiyonların oluşumunda kullanılır.

Ön Değerlendirme

1. Uygun tanım ve değer kümesine sahip f , g , h ve r fonksiyonlarının cebirsel temsilleri aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = 2x - 4$$

$$g(x) = \frac{1}{x-3} + 1$$

$$h(x) = x^2 + 2$$

$$r(x) = 5\sqrt{x-2}$$

f , g , h ve r fonksiyonlarından sadece biri için doğru olan nitel özellikler A, B ve C şeklinde gruplandırılmıştır.

A

- Artan fonksiyondur.
- Maksimum ve minimum noktası yoktur.
- Fonksiyonun sıfırı 2'dir.

B

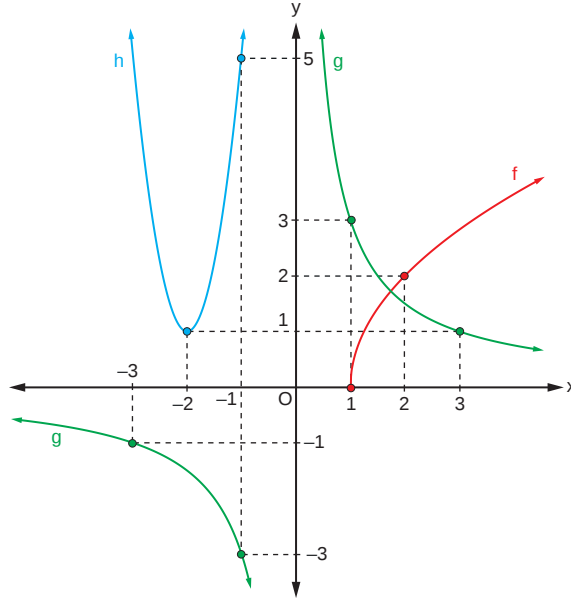
- Fonksiyonun işareti her noktada pozitiftir.
- Tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.
- Bire bir olmayan çift fonksiyondur.

C

- Fonksiyonun sıfırı 2'dir.
- Azalan fonksiyondur.
- Maksimum ve minimum noktası yoktur.

Buna göre f , g , h ve r fonksiyonlarını uygun nitel özellikler ile eşleştirerek boşta kalan fonksiyonu belirtiniz.

2.



Yukarıda dik koordinat sisteminde grafikleri verilen f karekök, h karesel ve g rasyonel fonksiyonlarının tanım ve değer kümeleri ile cebirsel temsillerini bulunuz.

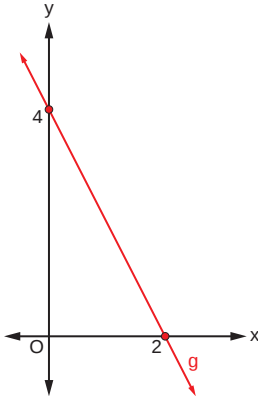
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel referans fonksiyonunun grafiğinin x eksenini boyunca pozitif yönde 3 birim ötelenmesi ile g fonksiyonunun grafiği ve g fonksiyonunun grafiğinin y eksenini boyunca negatif yönde 1 birim ötelenmesi ile h fonksiyonunun grafiği elde edilmiştir.

Buna göre g ve h fonksiyonlarının cebirsel ifadelerini yazınız ve grafiklerini çizin.

4. Aşağıdaki tabloda verilen fonksiyonların nitel özelliklerini bularak ilgili boşlukları doldurunuz.

Nitel Özellikler	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 4 - 2x$	$g: [9, 24) \rightarrow [6, 9)$ $g(x) = \sqrt{3x + 9}$	$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x) = x^2 + 25$	$k: [0, \infty) \rightarrow \left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$ $k(x) = \frac{-18}{x+4} + 3$
Tanım Kümesi				
Görüntü Kümesi				
Bire Bir Olma Durumu				
Örten Olma Durumu				
Maksimum Noktası ve Değeri				
Minimum Noktası ve Değeri				
Teklik-Çiftlik				
Artanlık-Azalanlık				
Sıfırları				
İşareti	(+)			
	(-)			

- 5.



Yanda f doğrusal referans fonksiyonuna yapılan dönüşümler ile elde edilen g fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

a) g fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

b) $g(3) + g^{-1}(5)$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

6. Bir fidanlıktaki fidanlar, 60 günde satışa hazır hâle gelmektedir. Fidanların günlere bağlı boy uzunluğu (cm) $f(x) = 30 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{60} + \frac{3\pi}{2}\right) + 70$ şeklinde modellenmiştir.

Buna göre

a) Fidanların boy uzunluğunun 20. günde kaç cm olacağını bulunuz.

b) Fidanların boy uzunluklarının hangi aralıklarda değiştiğini bulunuz.

7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 3^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun grafiğinin x ekseninde pozitif yönde 2 birim ötelenmesiyle g fonksiyonu, f fonksiyonunun grafiğinin y ekseninde negatif yönde 2 birim ötelenmesiyle h fonksiyonu elde ediliyor

Buna göre

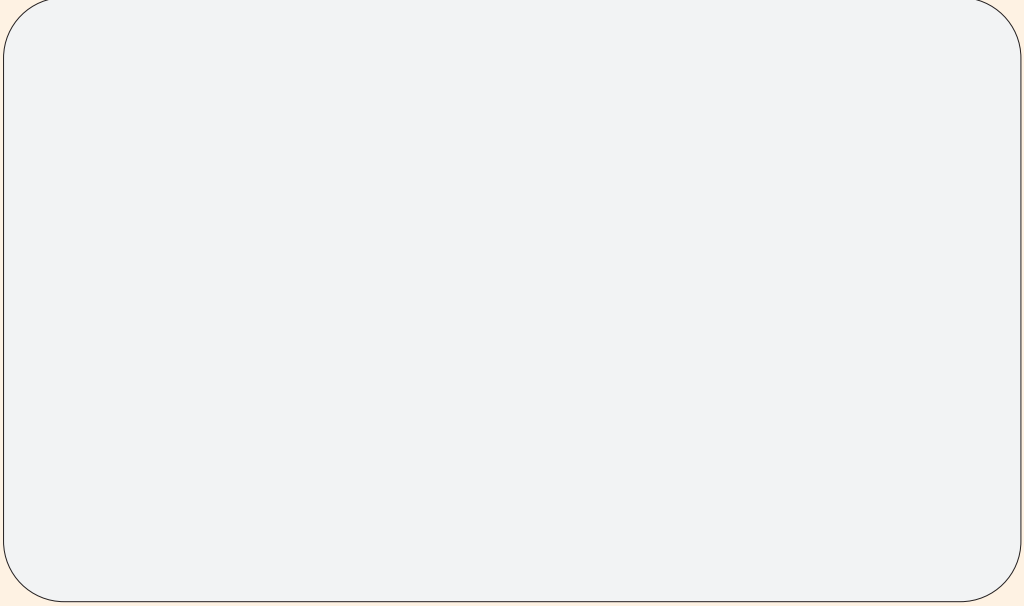
a) g ve h fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bulunuz.

b) g^{-1} ve h^{-1} fonksiyonlarının tanım kümeleri sırasıyla A ve B olmak üzere $A \cap B$ yi bulunuz.

5.1. FONKSİYONLARIN BİLEŞKESİ

Konuya Başlarken

1. a) Daha önce öğrendiğiniz bilgileri temel alarak fonksiyonlar ve onların nitel özellikleriyle ilgili anahtar kavramları ve bunlar arasındaki ilişkileri görselleştirdiğiniz bir kavram haritası oluşturunuz.



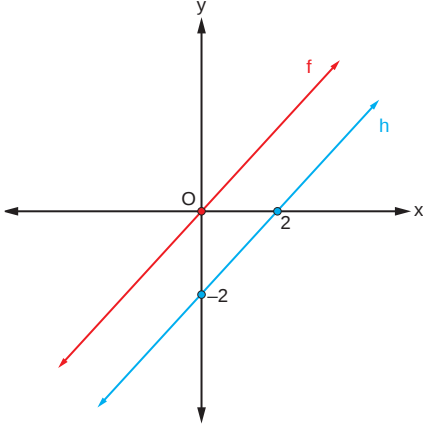
- b) Oluşturduğunuz kavram haritasını kullanarak ön bilgilerinizi değerlendiriniz ve hangi konularda eksikleriniz olduğunu tespit ediniz.
2. Fonksiyonlarla ilgili bilgilerinizden yola çıkarak birden çok fonksiyonel işlemi sırasıyla yapmanın hangi durumlarda gerekli olabileceği ile ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız. Fikirleriniz üzerine arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız.
3. Bir ekmek fabrikasında bulunan A makinesi ile içerisine konulan buğdayın kütlesinin yarısı kadar un üretilmektedir. B makinesiyle ise içerisine konulan unun her 1000 gramı için 600 gram su eklenerek hamur elde edilebilmektedir. Fabrika sahibi, A ve B makinelerinin yerine bu iki makinenin yaptığı işi tek başına yapabilen bir C makinesi satın alıyor. A makinesinin buğdaydan elde ettiği unun miktarını (g) veren fonksiyon f , B makinesinin undan elde ettiği hamurun miktarını veren (g) fonksiyon g olmak üzere
 - a) f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bulunuz.
 - b) A ve B makinelerinin çalışma prensiplerine bağlı kalan C makinesini temsil eden h fonksiyonunun cebirsel temsili f ve g fonksiyonları yardımıyla nasıl bulunabilir? Yorumlayınız.
 - c) C makinesinin, A ve B makinelerinin yaptığı işi tek başına yapması örneğinden yararlanarak bir fonksiyonun birden çok fonksiyonun sağladığı işlemleri tek başına gerçekleştirmesine ilişkin fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. Uygulama

Fonksiyonlarda Bileşke Kavramı

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1.



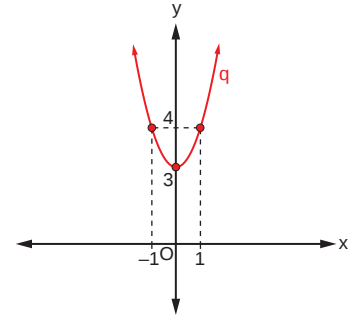
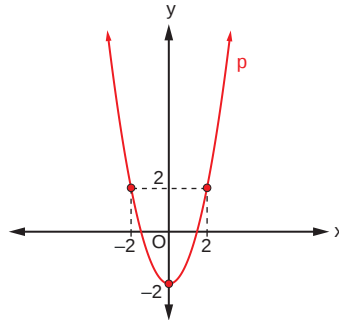
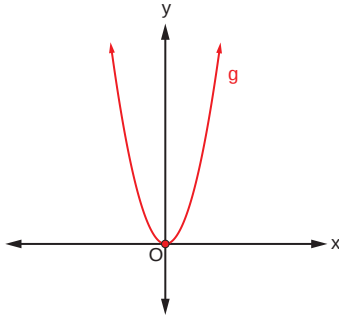
Gerçek sayılarda tanımlı f doğrusal referans fonksiyonun grafiğinin y eksenini boyunca negatif yönde 2 birim ötelenmesi ile gerçekte sayılarda tanımlı h fonksiyonunun grafiği elde edilmektedir.

Buna göre

- a) h fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.
 - b) h fonksiyonunun cebirsel temsilini kullanarak h fonksiyonunu f türünden ifade ediniz.
 - c) $y = h(f(x))$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.
 - ç) b ve c maddelerinde elde edilen cebirsel temsilleri benzerlik ve farklılıkları yönünden karşılaştırınız ve yorumlayınız.
2. Gerçek sayılarda $g(x) = x^2$, $h(x) = x - 2$ ve $t(x) = (x - 2)^2$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar veriliyor.
 - a) $k(x) = g(x - 2)$ şeklinde tanımlı fonksiyonun cebirsel temsilini bulunuz.
 - b) k fonksiyonunun cebirsel temsilini kullanarak k fonksiyonunu h türünden ifade ediniz.
 - c) b maddesinde elde edilen cebirsel temsil ile t fonksiyonunu benzerlik ve farklılıkları yönünden karşılaştırınız ve yorumlayınız.



- 3. Gerçek sayılarda $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x - 2$ ve $r(x) = x + 3$ şeklinde fonksiyonlar tanımlanmış; $g(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel referans fonksiyonuna yapılan dönüşümler ile p ve q fonksiyonları elde edilmiştir. Aşağıda g , p ve q fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- a) p ve q fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bulunuz.
- b) p ve q fonksiyonları elde edilirken g karesel referans fonksiyonuna hangi dönüşümlerin uygulandığını bulunuz.
- c) p ve q fonksiyonlarının cebirsel temsillerini g ve f fonksiyonları türünden ifade ediniz.
- ç) c maddesinde elde edilen cebirsel temsilleri kullanarak p fonksiyonunu g ile h türünden, q fonksiyonunu g ile r türünden ifade ediniz.
- d) Aşağıda uygun koşullarda tanımlı k_1 , k_2 , k_3 ve k_4 fonksiyonlarının cebirsel temsilleri verilmiştir. Buna göre k_1 , k_2 , k_3 ve k_4 fonksiyonlarını f , g , r ve t fonksiyonlarından en az ikisi türünden yazınız.
- I. $k_1(x) = (x - 2)^2 + 3$ II. $k_2(x) = x + 1$
- III. $k_3(x) = (x + 3)^2$ IV. $k_4(x) = x^2 + 1$

f ve g fonksiyonları için $g(f(x))$ olan bileşke işlemi $(g \circ f)(x)$ şeklinde gösterilir ve g bileşke f şeklinde okunur.

4. Gerçek sayılarda tanımlı ve değerli f ile g fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümelerindeki bazı değerler aşağıdaki Tablo 1 ve Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 1

x	1	2	3	4	5
f(x)	3	5	7	9	10

Tablo 2

x	3	5	7	9	11
g(x)	5	1	4	3	2

- a) Tablo 1 ve Tablo 2'de verilen f ve g fonksiyonlarına ait değerleri kullanarak aşağıdaki Tablo 3 ve Tablo 4'te boş bırakılan alanları örneklerdeki gibi doldurunuz.

Tablo 3

x	f(x)	g(f(x))
1	3	5
2		
3		
4		
5		

Tablo 4

x	g(x)	f(g(x))
3		
5		
7	4	9
9		
11		

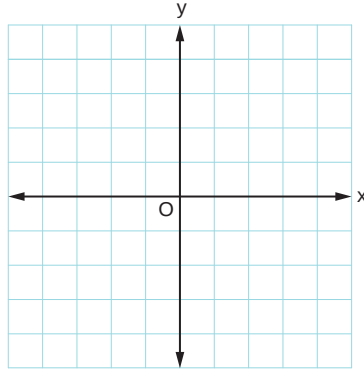
- b) Tablo 3'ten yararlanarak $g \circ f$ işlemi için f fonksiyonunun görüntü kümesi ile g fonksiyonunun tanım kümesi arasındaki ilişkiyi inceleyiniz.

Tablo 4'ten yararlanarak $f \circ g$ işlemi için g fonksiyonunun görüntü kümesi ile f fonksiyonunun tanım kümesi arasındaki ilişkiyi inceleyiniz.

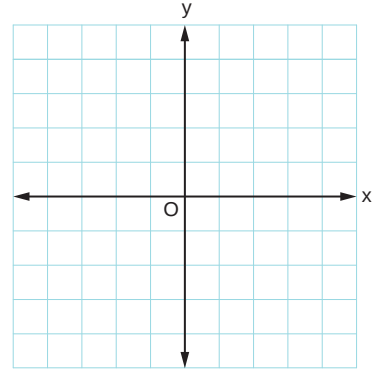
- c) $g \circ f$ ve $f \circ g$ işlemlerinin fonksiyon olma şartını sağlayıp sağlamadığını inceleyiniz. İnceleme sonunda fikirlerinizi paylaşınız ve sınıf arkadaşlarınızla fikirleriniz üzerine tartışınız.

► 5. $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x}$ ve $r: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, r(x) = x + 1$ şeklinde tanımlı h ve r fonksiyonları verilmiştir.

- a) h ve r fonksiyonlarını kullanarak $h \circ r$ ve $r \circ h$ işlemlerinin cebirsel temsillerini bulunuz.
- b) $h \circ r$ fonksiyonunun tanımlı olması için r fonksiyonunun görüntü kümesi ile h fonksiyonunun tanım kümesi arasında nasıl bir ilişki olduğunu bulunuz.
- c) $r \circ h$ fonksiyonunun tanımlı olması için h fonksiyonunun görüntü kümesi ile r fonksiyonunun tanım kümesi arasında nasıl bir ilişki olduğunu bulunuz.
- ç) Grafik 1'deki dik koordinat sistemine r fonksiyonunun grafiğini çiziniz. r fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $h \circ r$ fonksiyonunun grafiğini Grafik 2'deki dik koordinat sistemine çiziniz.

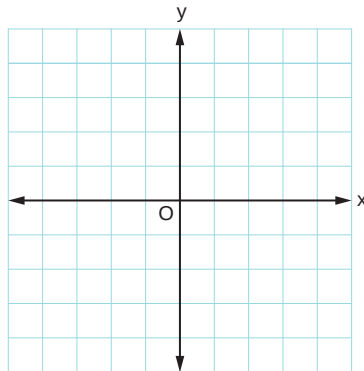


Grafik 1

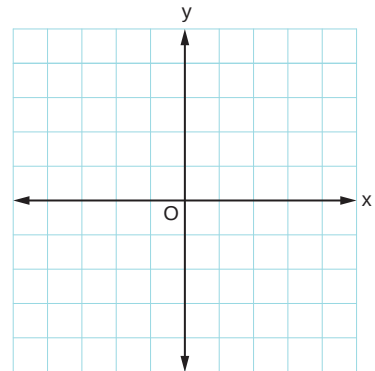


Grafik 2

- d) $h \circ r$ fonksiyonunun tanım kümesi ile r fonksiyonunun tanım kümesi arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.
- e) Grafik 3'teki dik koordinat sistemine h fonksiyonunun grafiğini çiziniz. h fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $r \circ h$ fonksiyonunun grafiğini Grafik 4'teki dik koordinat sistemine çiziniz.



Grafik 3



Grafik 4



f) $r \circ h$ fonksiyonunun tanım kümesi ile h fonksiyonunun tanım kümesi arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

g) Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıdaki adımları gerçekleştiriniz.

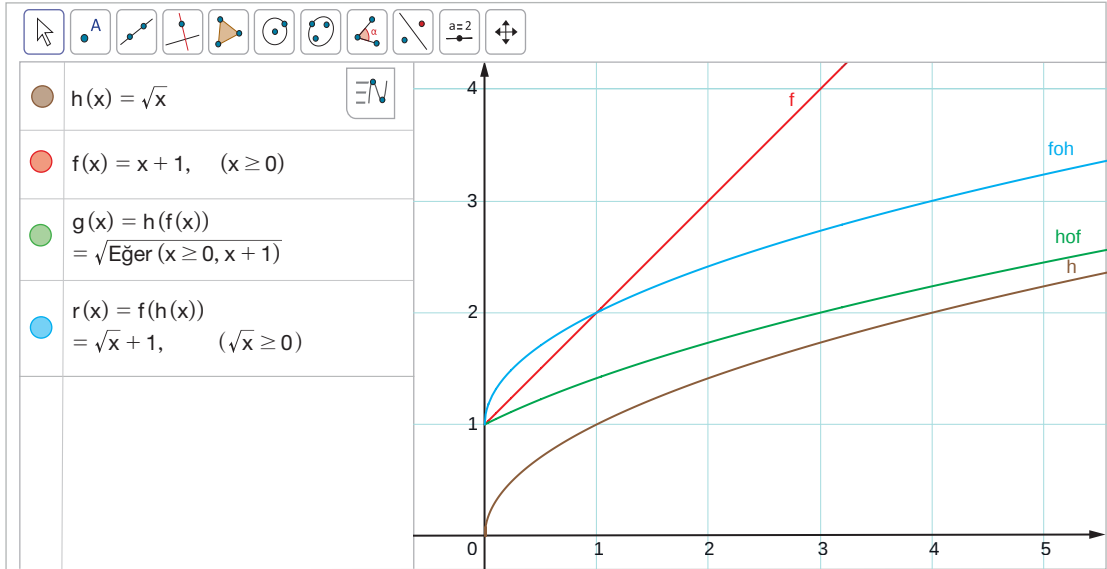
1. adım: Giriş bölümüne $h(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ yazınız.

2. adım: Giriş bölümüne $f(x) = x + 1$, $x \geq 0$ yazınız.

3. adım: Giriş bölümüne $g(x) = h(f(x))$ yazınız.

4. adım: Giriş bölümüne $r(x) = f(h(x))$ yazınız.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



Elde ettiğiniz $h \circ f$ ve $f \circ h$ fonksiyonunun grafik temsillerini inceleyerek tanım ve görüntü kümelerini karşılaştırınız.

6. Gerçek sayılarda tanımlı ve değerli f ve g fonksiyonları kullanılarak elde edilen $f \circ g$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesinin asgari koşullarını tespit ediniz. Elde ettiğiniz sonuçları arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. Örnek



Semiha, basıncın sabit kaldığı ortam koşullarında sıcak hava balonunun içindeki gazın ısıtılmasıyla balonun yükseldiğini gözlemlemiştir. Bu süreçte gazın sıcaklığı zamanla arttıkça balonun şiştiğini ve hacminin büyüdüğünü fark etmiştir. Bu durumu matematiksel olarak modellemek amacıyla balonun içindeki gazın başlangıçta 280 Kelvin olan sıcaklığının zamana (dk.) bağlı değişimini veren fonksiyon $f(x) = 4x + 280$ şeklinde oluşturmuştur. Balon içindeki gazın hacminin (m^3) sıcaklığa bağlı değişimi ise $g(x) = 7x$ şeklinde tanımlanmıştır.

Buna göre

1. Balon içindeki gaz ısıtmaya başladıktan 5 dakika sonra balonun içerisindeki gazın hacminin kaç m^3 olacağını bulunuz.
2. Balonun içerisindeki gazın ısıtılmasından kaç dakika sonra gazın hacminin $2380 m^3$ olacağını yazınız.
3. Balonun içerisindeki gazın ısıtmaya başlamasından itibaren zamana bağlı balonun hacmini modelleyen h fonksiyonunu ifade ediniz.

Çözüm

1. Önce 5. dakikada balonun içindeki gazın sıcaklığı bulunur. $f(x) = 4x + 280$ şeklinde tanımlı fonksiyonda $x = 5$ yazılırsa $f(5) = 4 \cdot 5 + 280 = 300$ Kelvin bulunur. Bu sıcaklık değeri $g(x) = 7x$ şeklinde tanımlı fonksiyonda kullanılır. Balonun hacmi $g(300) = 7 \cdot 300 = 2100$ metreküp olur.
2. Önce balonun hacminin 2380 metreküp olduğu sıcaklık değeri bulunur. $g(x) = 2380$ yazılır. $7x = 2380$ olur. Buradan $x = 340$ Kelvin bulunur. Balonun sıcaklığının 340 Kelvin olduğu zamanı bulmak için $f(x) = 340$ yapılır. $4x + 280 = 340$ olur. $4x = 60$ olur. Buradan $x = 15$ dakika bulunur.
3. h fonksiyonunu bulmak için f ile g fonksiyonlarının bileşkesi alınır. $h(x) = g(f(x)) = 7 \cdot f(x) = 7 \cdot (4x + 280) = 28x + 1960$ olur. Bu fonksiyon zamana bağlı balonun hacmini ifade eder.

Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için f fonksiyonunun görüntü kümesinin her bir elemanını g fonksiyonunun tanım kümesinin bir elemanı olarak kullanan fonksiyona **bileşke fonksiyon** denir. Bileşke fonksiyonu $y = g(f(x))$ veya $y = (g \circ f)(x)$ şeklinde gösterilir.

2. Örnek

Gerçek sayılarda $f(x) = 2x - 5$ ve $g(x) = x^2 - 3x + 7$ şeklinde f ve g fonksiyonları tanımlanıyor.

Buna göre $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bularak $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonları arasındaki ilişkiyi yorumlayınız.

Çözüm

$f(x) = 2x - 5$ ve $g(x) = x^2 - 3x + 7$ için

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot g(x) - 5 = 2 \cdot (x^2 - 3x + 7) - 5 = 2x^2 - 6x + 9$ olur.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x)^2 - 3 \cdot f(x) + 7 = (2x - 5)^2 - 3(2x - 5) + 7 = 4x^2 - 26x + 47$ olur.

$f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonlarının cebirsel temsilleri incelendiğinde fonksiyonların birbirine eşit olmadığı görülür.

Sıra Sizde 1

Aşağıdaki tabloda f ve g fonksiyonlarının bazı x değerlerine karşılık gelen görüntüleri verilmiştir.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	5	1	6	3
$g(x)$	3	5	6	2	1	4

Buna göre tabloda verilen değerleri kullanarak $\frac{f(g(2)) + g(f(3))}{f(f(1)) - g(g(4))}$ işleminin sonucunu bulunuz.

3. Örnek

$f: [5, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x - 5}$ ve $g: (-\infty, 4] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x + 5$ şeklinde f ve g fonksiyonları tanımlanıyor. Buna göre

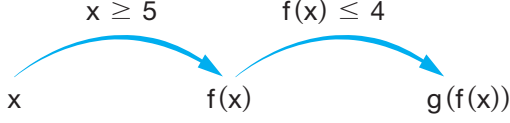
- $g \circ f$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
- $g \circ f$ fonksiyonunun cebirsel temsili bulunuz.
- $g \circ f$ fonksiyonunun grafiğini çizerek tanım kümesinin doğruluğunu kontrol ediniz.





Çözüm

1. $g \circ f$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için f fonksiyonunun tanım kümesinin her elemanının görüntüsü, g fonksiyonunun tanım kümesinin bir elemanı olmalıdır.



$f: [5, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in [5, \infty)$ olduğundan $x \geq 5$ olur. (1)

$f(x) \in (-\infty, 4] \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-5} \leq 4$ olmalıdır.

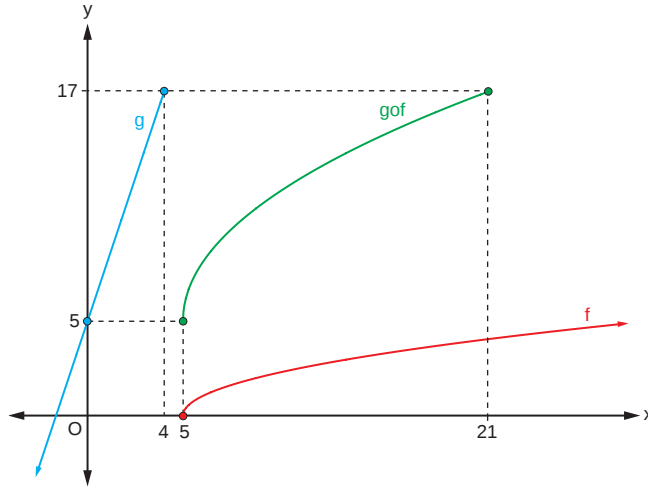
$$\sqrt{x-5} \leq 4 \Rightarrow x-5 \leq 16 \Rightarrow x \leq 21 \quad (2)$$

$g \circ f$ fonksiyonunun tanım aralığındaki x değişkeni (1) ve (2) durumlarını sağlamalıdır.

$x \geq 5$ ve $x \leq 21$ eşitsizlikleri birlikte değerlendirilir. $g \circ f$ fonksiyonu $5 \leq x \leq 21$ olması durumunda tanımlı olacaktır.

2. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3 \cdot f(x) + 5 = 3 \cdot \sqrt{x-5} + 5$ olur.

3. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde $g \circ f$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Grafik incelendiğinde $g \circ f$ fonksiyonunun tanım kümesinin $[5, 21]$ olduğu grafiksel olarak doğrulanır. Buna göre $g \circ f$ fonksiyonunun tanım kümesinin f fonksiyonunun tanım kümesinin bir alt kümesi olduğu söylenebilir.

Sıra Sizde 2

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x - 1$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 3$ olmak üzere $(f \circ g)(k) = -5$ eşitliği sağlanmaktadır.

Buna göre k değerini bulunuz.





2. $\mathbb{R} - \{0\}$ da $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı f rasyonel referans fonksiyonu ile $\mathbb{R}$ de $g(x) = 2x + 1$ şeklinde tanımlı g doğrusal fonksiyonu veriliyor. $A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere f ve g fonksiyonları için $(f \circ g)(A) = \left[\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right]$ eşitliği sağlanmaktadır.

Buna göre A kümesini bulunuz.

4. Örnek



Görselde B noktasında bulunan bir gemi, düz bir kıyı şeridine paralel olarak saatte 20 km sabit hızla ilerlemektedir. Gemi ile sahilde A noktasında bulunan deniz feneri arasındaki en yakın mesafe 5 km olmaktadır. Gemi, sahile paralel şekilde d km yol alarak C noktasına varmaktadır. Bu durumda gemi ile deniz feneri arasındaki mesafe s km olmaktadır.

$[AB] \perp [CB]$ olduğuna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. B noktasından hareket eden geminin aldığı yola (d) bağlı olarak deniz feneri ile arasındaki mesafeyi (s) modelleyen f fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.
2. Geminin deniz fenerine en yakın olduğu andan itibaren zamana bağlı olarak geminin aldığı yolu modelleyen g fonksiyonun cebirsel temsilini bulunuz.
3. Geminin zamana bağlı olarak deniz fenerine olan mesafesini modelleyen fonksiyonun cebirsel temsilini bulunuz.





Çözüm

1. ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa $s^2 = 5^2 + d^2$ denklemi elde edilir.
 $s = \sqrt{25 + d^2} \Rightarrow s = f(d) = \sqrt{25 + d^2}$ şeklinde tanımlı fonksiyon elde edilir.
2. Gemi saatte 20 km sabit hızla gidiyorsa t saat sonra $20t$ km yol alır. Bu durumda $d = g(t) = 20t$ olarak ifade edilir.
3. Geminin zamana bağlı olarak deniz fenerine olan mesafesini modelleyen $f \circ g$ fonksiyonu $(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(20t) = \sqrt{25 + (20t)^2}$ şeklinde elde edilir.

Sıra Sizde 3

Petrol taşıyan bir yük gemisinde meydana gelen petrol sızıntısının hemen ardından denizde yapılan araştırmalar, sızıntının dairesel bir şekilde yayıldığını göstermiştir. Sızan petrolün metre cinsinden yarıçap uzunluğu r , sızıntının başlangıcından itibaren t (saat) cinsinden ölçülen yarıçap uzunluğunu (metre) veren fonksiyon $r(t) = 10\sqrt{t}$ dir. Petrol sızıntısının denizde kapladığı alanın yarıçap uzunluğuna bağlı fonksiyonu ise $A(r) = \pi r^2$ ile ifade edilmiştir.

Buna göre

1. 4 saat sonra denizde oluşan sızıntının yarıçap uzunluğunun kaç metre olduğunu hesaplayınız.
2. 4 saat sonra denizde oluşan sızıntının deniz yüzeyinde kapladığı alanın kaç m^2 olduğunu hesaplayınız.
3. Sızan petrolün denizde oluşturduğu daire alanının zamana bağlı fonksiyonunun cebirsel temsili bulunuz.

Ek soruların yer aldığı 1. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.
 (İçerik: Bileşke Fonksiyon)



2. Uygulama



Bileşke Fonksiyonların Nitel Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. Bir sağlıklı yaşam uygulaması, kullanıcıların günlük adım sayısı ile kalori yakımı arasındaki ilişkiyi hesaplamak amacıyla çeşitli fonksiyonlar tanımlamıştır. Uygulama; her 1000 adımda 0,5 km yüründüğünü ifade eden g fonksiyonunu ve her kilometrede ortalama 50 kalori yakıldığını ifade eden f fonksiyonunu kullanmaktadır. g fonksiyonunun cebirsel temsili Görsel 1'de, f fonksiyonunun cebirsel temsili ise Görsel 2'de verilmiştir.



Görsel 1



Görsel 2

Her 1000 adımda yakılan kalori miktarını gösteren fonksiyon h olarak tanımlanıyor. Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) h fonksiyonunun cebirsel temsili bulunuz.

b) Tablo 1'i örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Adım Sayısı (Bin) x	Toplam Mesafe (km) $g(x)$	Yakılan Kalori $f(x)$
1	0,5	25
2		
4		
6		
8		

c) a ve b maddelerinden yararlanarak f , g ve h fonksiyonlarının grafiğini çizin.





ç) f ve g fonksiyonlarının grafiklerini inceleyerek Tablo 2'yi doldurunuz.

Tablo 2

Nitel Özellikler		f	g
Tanım Kümesi			
Görüntü Kümesi			
Bire Bir Olma Durumu			
Örten Olma Durumu			
Maksimum Noktası ve Değeri			
Minimum Noktası ve Değeri			
Teklik-Çiftlik			
Artanlık-Azalanlık			
Sıfırı			
İşareti	(+)		
	(-)		

d) f ve g fonksiyonlarının nitel özelliklerinden yararlanarak $(f \circ g)$ fonksiyonunun nitel özelliklerine dair çıkarımlarda bulununuz.

2. Uygun tanım ve değer kümesine sahip f ve g fonksiyonları ile ilgili Tablo 3'te verilen nitel özelliklere dair kabulleri inceleyerek $g \circ f$ fonksiyonu için uygun ifadeleri bulunuz ve tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3

Nitel Özellikler	f	g	$g \circ f$
Bire Bir Olma Durumu	Bire bir	Bire bir	Bire bir
	Bire bir	Bire bir değil	
	Bire bir değil	Bire bir	
	Bire bir değil	Bire bir değil	
Örten Olma Durumu	Örten	Örten	Örten
	Örten	Örten değil	
	Örten değil	Örten	
	Örten değil	Örten değil	





Artanlık/Azalanlık		Artan	Artan	Artan
		Azalan	Artan	
		Artan	Azalan	
		Azalan	Azalan	
Teklik/Çiftlik		Tek	Tek	Tek
		Tek	Çift	
		Çift	Tek	
		Çift	Çift	
Sıfırları		Yok	Yok	
		Var	Yok	Yok
		Yok	Var	
		Var	Var	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	Maksimum	Var	Artan	Var
		Var	Azalan	
	Minimum	Var	Artan	
		Var	Azalan	

3. Uygun tanım ve değer kümesine sahip $a(x) = 2x - 6$, $b(x) = \frac{x+3}{2}$, $c(x) = \sqrt{x+1}$ ve $d(x) = x^2 - 1$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar veriliyor.

- a) Tablo 4'te a, b, c ve d fonksiyonları kullanılarak oluşturulan bileşke fonksiyonlar verilmiştir. Tabloyu örneklerde gösterildiği gibi doldurarak bileşke fonksiyonların cebirsel temsillerini bulunuz.

Tablo 4

Bileşke İşlemi ($\circ$)		Fonksiyon			
		a	b	c	d
Fonksiyon	a				$(a \circ d)(x) = 2x^2 - 8$
	b				
	c	$(c \circ a)(x) = \sqrt{2x - 5}$			
	d				

- b) Tablo 4'te elde ettiğiniz fonksiyonları karşılaştırarak eşit olanları belirtiniz. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için gerekli koşullar hakkında çıkarımlarda bulununuz.



4. Yaptığınız tüm çalışmalardan yola çıkarak $h(x) = (f \circ g)(x)$ şeklinde tanımlı bileşke fonksiyonu ile ilgili nitel özelliklere dair varsayımlar oluşturunuz.

5. Oluşturduğunuz varsayımlara dayanarak bileşke fonksiyonlara ve bileşke fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin örüntüleri genelleyiniz.

6. Genellemelerinizin varsayımlarınızı karşılayıp karşılamadığını kontrol ederek uygun tanım ve değer kümesine sahip f ve g fonksiyonlarından elde edilen $h(x) = (f \circ g)(x)$ şeklinde tanımlı bileşke fonksiyonu ile ilgili nitel özelliklere dair önermelerinizi matematiksel olarak doğrulanabilecek şekilde sununuz.

7. Önermelerinizin gerçek yaşam bağlamında kullanışlılığını değerlendirmek için aşağıdaki problemi çözünüz.

Bir ürünün etiket fiyatı x TL olarak belirlenmiştir. Bu ürüne etiket fiyatı üzerinden önce %10 indirim yapılmış, ardından indirimli fiyat üzerinden %20 indirim daha yapılmıştır. İndirimler sonucunda oluşan satış fiyatı P fonksiyonu ile ifade edilmiştir.





Satış fiyatına belli oranda KDV (katma değer vergisi) eklenerek elde edilen net fiyat V TL ile gösterilmektedir.

Satış Fiyatı	: P TL
KDV	: + %10
Net Fiyat	: V TL

- Ürünün P satış fiyatını etiket fiyatı türüne göre modelleyen fonksiyonun cebirsel temsilini bulunuz.
- Ürünün V net fiyatını P satış fiyatı türünde modelleyen fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.
- Ürünün V net fiyatını etiket fiyat türünde modelleyen fonksiyonun cebirsel temsilini bulunuz.
- Etiket fiyatı 500 TL olan bir ürünün 100 adet satılması sonucunda elde edilecek net gelir kaç TL'dir?

8. Aşağıdaki önermeleri cebirsel olarak ispatlayınız veya grafiksel olarak doğrulayınız. İspatınızı cebirsel olarak gerçekleştirirken mantık bağlaçlarını ve niceleyicileri, ispatın sistematikliğini ve matematiksel kesinliğini yansıtacak şekilde kullanınız.

- " f ve g fonksiyonları bire bir iken $f \circ g$ fonksiyonu da bire birdir."

önermesinin ispatı ile ilgili verilen Tablo 5'i uygun şekilde doldurunuz.

Tablo 5

Önermenin İspat Adımları	Önermenin Cebirsel İspatı
f ve g fonksiyonlarının bire bir fonksiyon olduğu gösterilir.	
Önerme, mantık bağlaçları ve niceleyiciler kullanılarak cebirsel olarak yazılır.	
Bileşke fonksiyonun gösteriminden yararlanarak g fonksiyonunun değerlerinin eşitliği gösterilir.	
g fonksiyonunun bire birliği kullanılarak bağımsız değişkenlerin eşitliği gösterilir ve ispat tamamlanır.	





- b) Aşağıda "f fonksiyonu çift fonksiyon ise $g \circ f$ fonksiyonu da çift fonksiyondur." önermesinin ispatı ile ilgili verilen tablodaki boşlukları tamamlayınız.

Tablo 6

Önermenin İspat Adımları	Önermenin Cebirsel İspatı
f ve g fonksiyonları tanımlanır.	
Önerme, mantık bağlaçları ve niceleyiciler kullanılarak cebirsel olarak yazılır.	
$g \circ f$ fonksiyonunun gösteriminden yararlanılır.	
f nin çift fonksiyon olduğunu gösteren cebirsel eşitliğin iki tarafı da g ile bileşke oluşturulur.	
Bir önceki adımda bulunan eşitlikte bileşke işlemleri 3. adımdaki eşitlik kullanılarak gösterildiğinde ispat tamamlanır.	

- c) b maddesinde verilen önermeyi aşağıdaki adımları matematik yazılımında uygulayarak grafiksel olarak doğrulayınız.
- 1. adım:** Bilgisayar veya etkileşimli tahtada matematik yazılımını açarak **Sürgü** kısmını seçiniz. Buradan a, b ve c sürgülerini oluşturunuz.
 - 2. adım:** Giriş bölümüne $f(x) = (x + a)^2$ yazınız.
 - 3. adım:** Aynı işlemi $g(x) = (x + b)^2$ ve $h(x) = cx + 5$ fonksiyonlarının grafiklerini çizmek için kullanınız.
 - 4. adım:** Giriş bölümüne $g(f(x))$ yazınız.
 - 5. adım:** Giriş bölümüne $h(f(x))$ yazınız.
 - 6. adım:** Oluşan bileşke fonksiyonların grafiklerinde a, b ve c sürgülerini hareket ettirerek grafikteki değişimleri gözlemleyiniz.
9. Doğrulama ve ispat yöntemlerinizi kullanışlılık açısından sınıf arkadaşlarınızla birlikte değerlendiriniz.

Önermelerin ispatına yönelik Çalışma Kağıdı'na ve Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



5. Örnek

Mustafa, İstanbul'dan Sakarya'ya yapacağı yolculuk için kesintisiz ulaşım imkânı sunması ve yakıt tüketiminin daha düşük olmasından dolayı daha verimli bir güzergâh olan görseldeki Kuzey Marmara Otoyolu'nu tercih etmiştir.



Mustafa'nın aracının ilk 60 dakikada aldığı yol için t dakikada katettiği mesafe kilometre cinsinden aşağıdaki fonksiyonla ifade edilmektedir.

$$f(t) = t + \frac{t^2}{40}$$

Aracın aldığı yol x km, yola bağlı olarak harcadığı yakıt miktarı ise litre cinsinden aşağıdaki fonksiyonla ifade edilmektedir.

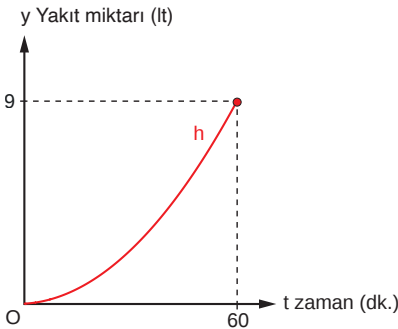
$$g(x) = 0,06x$$

Bileşke fonksiyonunun nitel özellikleri için oluşturulan önermelerden yararlanarak aracın otoyolda yol alırken zamana bağlı olarak harcadığı yakıt miktarını veren fonksiyonun nitel özelliklerini bulunuz.

Çözüm

Aracın zamana bağlı olarak harcadığı yakıt miktarını veren h fonksiyonunun cebirsel temsili

$h(t) = (g \circ f)(t) = g(f(t)) = g\left(t + \frac{t^2}{40}\right) = 0,06 \cdot \left(t + \frac{t^2}{40}\right)$ buradan $h(t) = 0,06 \cdot t + 0,0015 \cdot t^2$ olarak bulunur. $t \in [0, 60]$ için $g \circ f$ fonksiyonunun grafik temsili aşağıda verilmiştir.



f fonksiyonu aracın zamana bağlı aldığı yolu gösterdiği için $g \circ f$ fonksiyonunun tanım kümesi f fonksiyonunun tanım kümesi ile aynı olur. Bileşke fonksiyonun grafiği incelendiğinde tanım kümesinin $[0, 60]$, görüntü kümesinin ise $[0, 9]$ olduğu görülür.

f ve g fonksiyonları tanımlandığı aralıklarda bire birdir. Bundan dolayı $g \circ f$ fonksiyonu da bire birdir. $g \circ f: [0, 60] \rightarrow [0, 9]$ olduğundan bileşke fonksiyonu örtendir.

Bileşke fonksiyonun grafiği incelendiğinde sıfırının $t = 0$ olduğu görülür.

f , g ve h fonksiyonları $[0, 60]$ nda tanımlı olduğu için ne tek ne çift fonksiyondur.

Bileşke fonksiyonun grafik temsili incelendiğinde aldığı minimum değer $y = 0$, minimum değeri veren noktası ise $t = 0$ olmaktadır. Maksimum noktası $t = 60$ için $y = 9$ olacaktır.

Bileşke fonksiyon $[0, 60]$ nda artan fonksiyondur. Bileşke fonksiyonunun $(0, 60]$ nda işareti pozitifdir.

Sıra Sizde 4

Göldeki artan su kirliliği, balık popülasyonu ve göl ekosisteminde yer alan diğer canlılar üzerinde olumsuz etkiler yaratmaktadır. Kirlenmenin etkisiyle özellikle balık türleri için yaşamsal öneme sahip olan yiyecek kaynakları hızla tükenmektedir. Bu durum popülasyonun azalmasına ve ekosistemin dengesinin bozulmasına yol açmaktadır.

Bu kapsamda gölde yaşayan belirli bir balık türünün polülasyonunun zamana (yıl) bağlı değişimi $f(t) = 1000 \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t}$ şeklinde f fonksiyonu ile modellenmiştir. Buna bağlı olarak gölde kalan yiyecek miktarının (kg) balık popülasyonuna bağlı olarak değişimi ise $g(x) = 100 - \frac{1}{10} \cdot x$ şeklinde g fonksiyonu ile modellenmiştir.

Buna göre

- a) Gölde kalan yiyecek miktarının zamana bağlı değişimini veren h fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

- b) h fonksiyonunun nitel özelliklerini bulunuz.

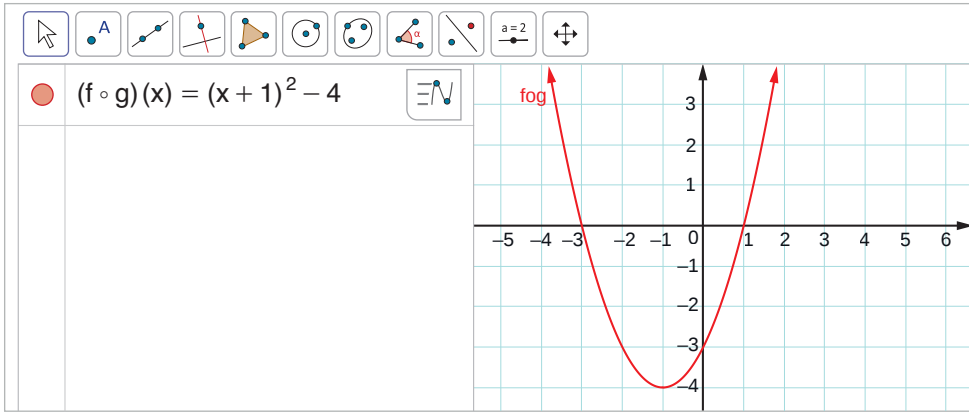
6. Örnek

Gerçek sayılarda $f(x) = x - 3$ ve $g(x) = (x + 1)^2 - 1$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar verilmiştir. Buna $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonlarının

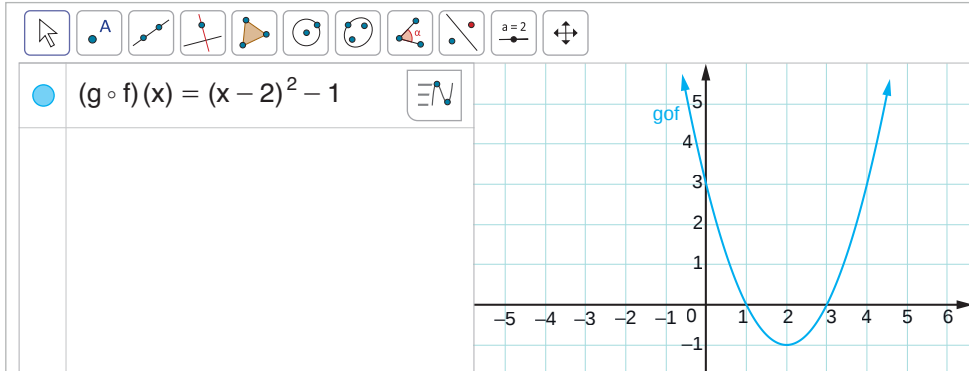
1. Cebirsel temsillerini bulunuz.
2. Matematik yazılımında grafiklerini çiziniz.
3. Artan veya azalan oldukları aralıkları bulunuz.
4. Maksimum-minimum noktası ve değerini bulunuz.
5. Sıfırlarını bulunuz.

Çözüm

1. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x + 1)^2 - 4$ ve $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x - 2)^2 - 1$
2. Aşağıdaki Grafik 1'de $f \circ g$ fonksiyonu ,Grafik 2'de ise $g \circ f$ fonksiyonu verilmiştir.



Grafik 1



Grafik 2

3. $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2 - 4$ ve $(g \circ f)(x) = (x - 2)^2 - 1$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar birer karesel fonksiyon olduğundan grafikleri Grafik 1 ve Grafik 2'de görüldüğü gibi paraboldür. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x + 1)^2 - 4$ fonksiyonu $(-\infty, -1]$ nda azalan, $[-1, \infty)$ nda artandır. Grafik 1'de bu durum doğrulanır. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x - 2)^2 - 1$ fonksiyonu $(-\infty, 2]$ nda azalan, $[2, \infty)$ nda artandır. Grafik 2'de bu durum doğrulanır.



- 4. Grafik 1'de $f \circ g$ fonksiyonunun minimum değeri $y = -4$, minimum değeri veren nokta $x = -1$ 'dir. Fonksiyonun maksimum noktası ve maksimum değeri yoktur. Grafik 2'de $g \circ f$ fonksiyonunun minimum değeri $y = -1$, minimum değeri veren nokta $x = 2$ 'dir. Fonksiyonun maksimum noktası ve maksimum değeri yoktur.
5. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x + 1)^2 - 4$ fonksiyonunun sıfırları için $(f \circ g)(x) = 0$ olması incelenir. Bu durumda $(x + 1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 4 \Rightarrow x + 1 = 2$ ve $x + 1 = -2$ olur. $x = 1$ ve $x = -3$ değerleri fonksiyonun sıfırları olarak bulunur. Bu değerler Grafik 1'de verilmiştir.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x - 2)^2 - 1$ fonksiyonunun sıfırları için $(g \circ f)(x) = 0$ olması incelenir. Bu durumda $(x - 2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 1 \Rightarrow x - 2 = 1$ ve $x - 2 = -1$ olur. $x = 3$ ve $x = 1$ değerleri fonksiyonun sıfırları olarak bulunur. Bu değerler Grafik 2'de verilmiştir.

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



Sıra Sizde 5

Gerçek sayılarda $f(x) = 3 - x$ ve $g(x) = 2x$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar verilmiştir.

Buna göre $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonlarının

1. Cebirsel temsillerini yazınız.
2. Tek veya çift fonksiyon olma durumlarını cebirsel olarak gösteriniz.
3. Grafiklerini çizerek 2. maddede bulduğunuz sonuçları doğrulayınız.

7. Örnek

"f gerçekte sayılarda tanımlı azalan bir fonksiyon ve g gerçekte sayılarda tanımlı artan bir fonksiyon olmak üzere $g \circ f$ bileşke fonksiyonu gerçekte sayılarda azalan bir fonksiyondur."

Verilen önermeyi ispatlayınız.

Çözüm

1. adım: f azalan bir fonksiyon ise $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ dir.

2. adım: g artan bir fonksiyon ise $\forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ için $x_3 < x_4 \Rightarrow g(x_3) < g(x_4)$ tür.

3. adım: g artan fonksiyon ve $f(x_1) > f(x_2)$ için $g(f(x_1)) > g(f(x_2))$ olur.

Buna göre $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow (g \circ f)(x_1) > (g \circ f)(x_2)$ olduğu görülür. Bundan dolayı $g \circ f$ bileşke fonksiyonu gerçekte sayılarda azalan fonksiyondur.

Araştırma Ödevi

Aşağıdaki görevleri gerçekleştirerek araştırma ödevini öğretmeninizin belirlediği süre içinde eksiksiz olarak tamamlayınız.

- Bileşke fonksiyonların gerçekte yaşamda kullanım alanlarıyla ilişkilendirildiği örnek problem durumlarını araştırınız.
- Belirlediğiniz gerçekte yaşam durumuna uygun fonksiyonların bağımlı ve bağımsız değerlerini içeren bir tablo oluşturunuz.
- Tablodaki veriler yardımıyla fonksiyonunun cebirsel temsilini oluşturunuz ve grafiğini çizin.
- Yaptığınız çalışmanın tüm aşamalarını içeren bir rapor hazırlayıp sınıf arkadaşlarınıza sununuz.
- Çalışmanız Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı kullanılarak öğretmeniniz tarafından değerlendirilecektir.

Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



8. Örnek

$f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$, $f(x) = \frac{3x-7}{x-3}$ şeklinde bir f fonksiyonu tanımlanıyor. Buna göre aşağıdaki bileşke fonksiyon değerlerini bulunuz.

1. $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{7 \text{ tane}}(5)$

2. $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{8 \text{ tane}}(2026)$



Çözüm

1. $f(x) = \frac{3x-7}{x-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x-7}{x-3}$ olur. Diğer bir ifadeyle $f(x) = f^{-1}(x)$ dir.

$(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x)$ ifadesinde tekrarlanan fonksiyon sayısı tek sayı olduğundan ikinci, dördüncü ve altıncı f yerine f^{-1} yazılırsa

$$(f \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1} \circ f)(x) = f(x) = \frac{3x-7}{x-3} \text{ olur.}$$

Bu durumda $x = 5$ için $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{7 \text{ tane}}(5) = f(5) = \frac{3 \cdot 5 - 7}{5 - 3} = \frac{8}{2} = 4$ olarak bulunur.

2. $f(x) = f^{-1}(x)$ olduğundan $(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x)$ ifadesinde tekrarlanan fonksiyon sayısı çift sayı olduğundan ikinci, dördüncü, altıncı ve sekizinci f yerine f^{-1} yazılırsa $(f \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1} \circ \dots \circ f \circ f^{-1})(x) = x$ olur. Bu durumda $x = 2026$ için sonuç 2026 olarak bulunur.

Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonu ile tersi olan f^{-1} fonksiyonun bileşkesi doğrusal referans fonksiyona eşittir. Bu eşitlik $(f \circ f^{-1})(x) = x$ şeklinde gösterilir.

9. Örnek

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı bire bir ve örten f ve g fonksiyonları için $(f \circ g)(x) = f(x) + g(x)$ eşitliği sağlanmaktadır. Buna göre $f(3) = 5$ ise $(f \circ g^{-1})(3)$ işleminin sonucunu bulunuz.

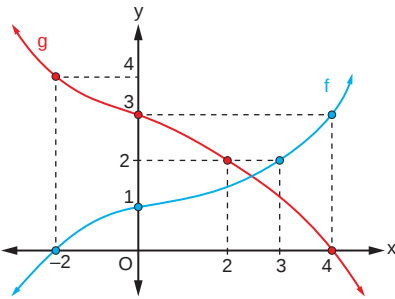
Çözüm

$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$ dir. Buradan hareketle $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) + g(x)$ fonksiyonunda x yerine $g^{-1}(x)$ yazılırsa $(f(g(g^{-1}(x)))) = f(g^{-1}(x)) + g(g^{-1}(x))$ olur ve $(g \circ g^{-1})(x) = x$ olduğundan $f(x) = (f \circ g^{-1})(x) + x$ şeklinde yazılır. Burada $x = 3$ yazılırsa

$$f(3) = (f \circ g^{-1})(3) + 3 \Rightarrow 5 = (f \circ g^{-1})(3) + 3 \Rightarrow (f \circ g^{-1})(3) = 2 \text{ olarak bulunur.}$$

Sıra Sizde 6

1.



Yanda $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.

Grafikte yer alan bilgilere göre $(f \circ g^{-1})(4)$ ve $(f^{-1} \circ g)(2)$ değerlerini bulunuz.

2. f, g ve h ; gerçekte sayılarda tanımlı bire bir ve örten fonksiyonlar olmak üzere

$$f(2x - 5) = g^{-1}(3x - 1) = h(x + 5) \text{ eşitliği veriliyor.}$$

Buna göre $(g \circ f)(3) + (f^{-1} \circ h)(3)$ değerini hesaplayınız.

3. f, g gerçek sayılarda tanımlı iki fonksiyon ve k gerçek sayı olmak üzere $(f \circ g)(x) = 2 \cdot g(x) + 3$ ve $(g \circ f)(x) = k \cdot f(x) - 5$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar verilmiştir.
- $g(1) = f^{-1}(7)$ olduğuna göre k değerini bulunuz.

Performans Görevi

Adı: Bileşke Fonksiyonlar ve Bileşke Fonksiyonların Nitel Özellikleri

Beklenen Performans: Bileşke fonksiyonlar ve bileşke fonksiyonların nitel özelliklerinin incelenmesiyle ilgili bilgileri araştırmak ve bu bilgileri dijital araçlar kullanarak dosya hazırlama ve sunma.

Görev: Bu görevde bileşke fonksiyonlar ve bileşke fonksiyonların nitel özelliklerini (Tanım kümesi, görüntü kümesi, bire birlik, örtenlik, artanlık-azalanlık vb. gibi) belirleyeceğiniz senaryolar üzerinden inceleyerek sunum dosyası hazırlamanız ve sınıf arkadaşlarınıza sunmanız beklenmektedir.

Yönerge:

Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Yapılacak işleri ve çalışma takviminizi içeren bir çalışma planı oluşturunuz.
- Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz.
- Çalışmanızı öğretmeninizin belirlediği sürede tamamlayınız.

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Günlük hayatta bileşke fonksiyonların kullanılabileceği üç farklı senaryo belirleyiniz.
- (Örneğin yakıt tüketimi veya vücut kitle indeksi)
- Bu senaryoları fonksiyon şeklinde modelleyiniz.
- Bu fonksiyonları birleştirerek bir bileşke fonksiyon oluşturunuz.
- Oluşturduğunuz bileşke fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili soruları cevaplayınız. Cevaplarınızı içeren dosyanızı dijital yollarla oluşturunuz.
- Çalışmanız için bir sunum hazırlayınız.

Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Oluşturduğunuz sunuyu sınıfınızda arkadaşlarınızla paylaşınız.
- Tamamladığınız dosyayı öğretmeninize teslim ediniz.

Değerlendirme: Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



Kontrol Noktası

$A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ tanımlı fonksiyonlar olmak üzere $g \circ f$ fonksiyonunun nitel özellikleri aşağıdaki gibidir.

- Bire Birlik İncelemesi

f	g	$g \circ f$
bire bir	bire bir	bire bir
bire bir	bire bir değil	bire bir/ bire bir değil
bire bir değil	bire bir	bire bir değil
bire bir değil	bire bir değil	bire bir değil

- Örtelik İncelemesi

f	g	$g \circ f$
örtel	örtel	örtel
örtel	örtel değil	örtel değil
örtel değil	örtel	örtel/ örtel değil
örtel değil	örtel değil	örtel değil

- Artanlık-Azalanlık İncelemesi

f	g	$g \circ f$
artan	artan	artan
artan	azalan	azalan
azalan	artan	azalan
azalan	azalan	artan

- Teklik-Çiftlik İncelemesi

f	g	$g \circ f$
çift	tek/çift ne tek ne çift	çift
tek	tek	tek
tek	çift	çift

- Maksimum Nokta-Minimum Nokta İncelemesi

f	g	$g \circ f$
maksimumu var	artan	maksimumu var
maksimumu var	azalan	minimumu var
minimumu var	artan	minimumu var
minimumu var	azalan	maksimumu var

Ek soruların yer aldığı 2. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.
(İçerik: Bileşke Fonksiyonların Nitel Özellikleri)



Alıştırmalar

1. Uygun koşullarda tanımlı bir f fonksiyonunun bazı x gerçel sayıları için aldığı değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

x	-9	-3	1	2	5	6
f(x)	5	6	-3	1	2	-9

Buna göre $(f \circ f \circ f)(5)$ değerini bulunuz.



2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ ve $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 3$ şeklinde tanımlı f, g fonksiyonları verilmiştir.

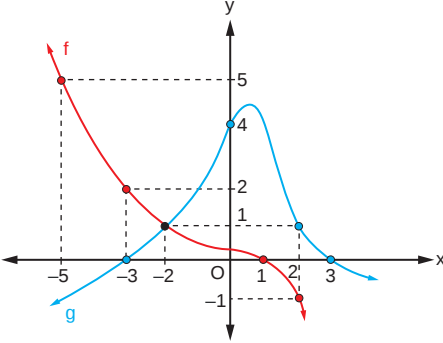
Buna göre aşağıdaki tabloyu verilen önermelerin doğru ya da yanlış olma durumuna göre doğru ise D, yanlış ise Y yazarak doldurunuz.

Önermeler	D/Y
$f \circ f$ bire bir fonksiyondur.	
$f \circ f$ örten fonksiyondur.	
$f \circ g$ bire bir fonksiyondur.	
$f \circ g$ örten fonksiyondur.	

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için $(f \circ g)(x) = \log_2(16 \cdot x^2 + 1) + 17$, $g(x) = 4x - 1$ ifadeleri veriliyor.

Buna göre f fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

4.



Yanda $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.

Buna göre $\frac{(f \circ f)(-2) + (g \circ f)(-3)}{(f \circ g)(2) - (g \circ g)(3)}$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. Gerçek sayılarda tanımlı f tek, g ve h çift fonksiyonları için $f(-2) = -4$, $g(-3) = 2$ ve $h(-4) = 5$ eşitlikleri verilmiştir.

Buna göre $(f \circ g)(3) - (h \circ f)(2)$ ifadesinin değerini bulunuz.

5.2. FONKSİYONLARDA DÖRT İŞLEM

Konuya Başlarken



Güneş enerjisi, Güneş'ten elde edilen yenilenebilir, doğal ve tükenmez bir enerji kaynağıdır. Çevre dostu ve ekonomik olması nedeniyle gelecekte enerji ihtiyacının karşılanmasında önemli bir rol oynayacağı tahmin edilmektedir. Güneş enerjisi; elektrik üretimi, ısınma ve aydınlatma gibi birçok alanda kullanılabilir.

Bu doğrultuda hem çevreyi korumak hem de ev ekonomisinde tasarruf sağlamak isteyen Seyfi Bey, evine güneş enerjisi sistemi kurdurmuştur. Amacı, dışarıdan elektrik alma ihtiyacını mümkün olduğunca azaltmaktır.

Evde kullanılan bazı elektrikli cihazların x saatteki enerji tüketimleri kilovatsaat (kWh) cinsinden aşağıda verilmiştir.

- Buzdolabı: $4x$ kWh
- Kombi: $(2x + 3)$ kWh
- Aydınlatma: $(3x + 1)$ kWh

Kurulan güneş enerjisi sisteminin x saatteki elektrik üretimi $5x$ kWh'tir.

Buna göre

1. Buzdolabı, kombi ve aydınlatmanın tükettiği enerjinin tamamının tek bir fonksiyonla nasıl ifade edilebileceğini ve bu durumun gerçekleşmesi için hangi şartların sağlanması gerektiğini yorumlayınız.
2. Seyfi Bey'in dışarıdan alması gereken elektrik enerjisi miktarını gösteren fonksiyonun nasıl elde edilebileceğini yorumlayarak fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

3. Uygulama



Fonksiyonlarda Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. a) $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$ ve $g: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar için verilen tabloyu örneklerdeki gibi doldurunuz.

	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 4$	$x_4 = 5$
$f(x)$	$f(1) = 5$			
$g(x)$	Tanımsız			
$f(x) + g(x)$				
$f(x) - g(x)$				

- b) Tablodan elde ettiğiniz sonuçları inceleyiniz, f ve g fonksiyonları kullanılarak toplama ve çıkarma işlemlerinin tanımlanıp tanımlanamayacağına ilişkin fikirlerinizi yazınız.
- c) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ve $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ eşitliklerinden elde edilen $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının cebirsel temsillerini yazınız.
- ç) $f, g, f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.
- d) $f, g, f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının grafik temsillerini inceleyerek bu fonksiyonların tanım ve değer kümeleri arasındaki ilişkileri belirtiniz.
- e) $f, g, f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının cebirsel ve grafik temsilini inceleyerek f ve g fonksiyonları ile yapılan işlemler sonucunda oluşan $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının tanımlı olabilmesi için gereken asgari koşulları tespit ediniz.





2. a) Gerçek sayılarda $h(x) = x^2$ ve $s(x) = x$ şeklinde tanımlı fonksiyonlarla elde edilen $h + s$ ve $h - s$ fonksiyonlarının tanım kümelerini bularak bu fonksiyonların cebirsel ve grafik temsilini oluşturunuz.

- b) $h + s$ ve $h - s$ fonksiyonlarında h ve s fonksiyonlarına göre oluşan değişimi hem grafik üzerinde hem de cebirsel olarak değerlendiriniz.

3. Yaptığınız çalışmalardan yola çıkarak iki fonksiyona yapılan toplama ve çıkarma işlemleri sonucunda yeni fonksiyonların elde edilebilmesi ile bu iki fonksiyonun tanım kümelerinin ilişkisini hem sözel hem de cebirsel olarak ifade ediniz.

10. Örnek

Uygun koşullarda $f(x) = \sqrt{x-1}$ ve $g(x) = \sqrt{4-x}$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar verilmiştir.

Buna göre

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ve $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ şeklinde tanımlı fonksiyonların cebirsel temsilini bularak tanım kümelerini belirtiniz.
2. Matematik yazılımı ile $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının grafiklerini çizerek 1. maddede yer alan çözümü doğrulayınız.

Çözüm

$$1. \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{4-x}$$

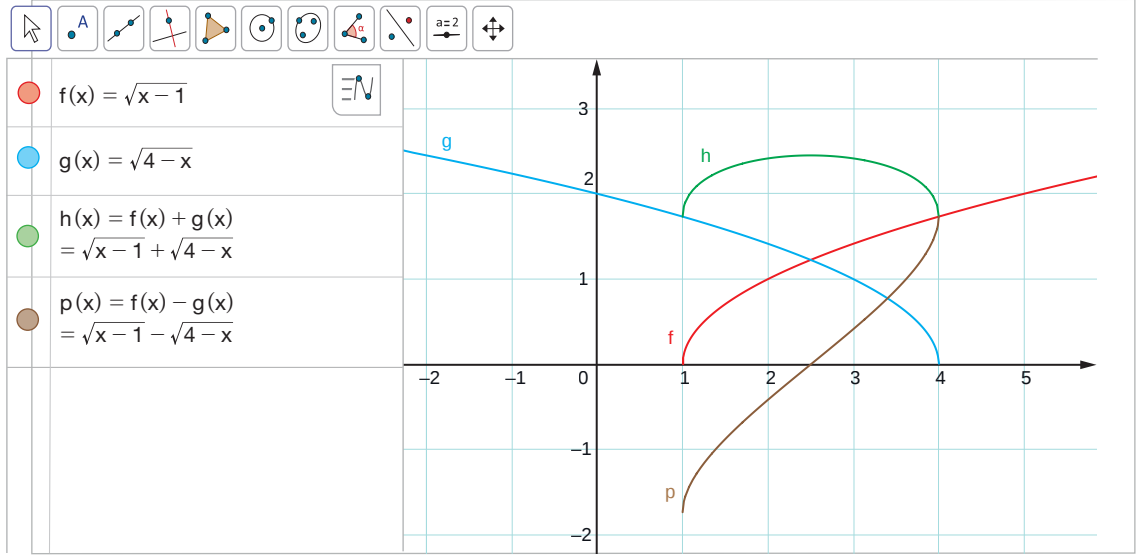
$f(x) = \sqrt{x-1}$ şeklindeki fonksiyonun tanımlı olması için $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ olmalıdır. f nin tanım aralığı $[1, \infty)$ dir. $g(x) = \sqrt{4-x}$ şeklindeki fonksiyonun tanımlı olması için $4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$ olmalıdır. g nin tanım aralığı $(-\infty, 4]$ dir.

$f(x) + g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$ şeklindeki fonksiyonun tanımlı olması için $x \geq 1$ ve $x \leq 4$ olmalıdır. Tanım kümesi $(-\infty, 4] \cap [1, \infty) = [1, 4]$ olur.

$f(x) - g(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{4-x}$ şeklindeki fonksiyonun tanımlı olması için $x \geq 1$ ve $x \leq 4$ olmalıdır. Tanım kümesi $(-\infty, 4] \cap [1, \infty) = [1, 4]$ olur.



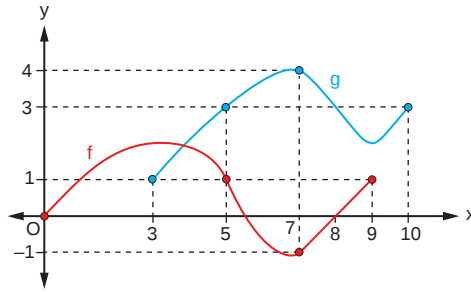
2. Aşağıda $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının grafiği çizilmiştir.



Grafik incelendiğinde $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının tanım kümesinin f ve g fonksiyonlarının tanım kümelerinde ortak olan değerlerden oluştuğu görülür. $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının tanım kümesi $(-\infty, 4] \cap [1, \infty) = [1, 4]$ dir. Bu durumun cebirsel temsilde bulunan tanım kümesini doğruladığı görülür.

Sıra Sizde 7

Aşağıda f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre

1. f , g , $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz.
2. $(f + g)(5)$ ve $(f - g)(7)$ değerlerini hesaplayınız.

11. Örnek

f ve g gerçekte sayılarda tanımlı bire bir ve örten fonksiyonlar olmak üzere $f^{-1}(3x - g(x + 1)) = 4x - 5$ eşitliği verilmiştir.

Buna göre $(f + g)(3)$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

Soruda verilen eşitliğin sol ve sağ taraflarının f fonksiyonu ile bileşkesi alınır.

$$f^{-1}(3x - g(x + 1)) = 4x - 5 \Rightarrow f(f^{-1}(3x - g(x + 1))) = f(4x - 5)$$

$$\Rightarrow 3x - g(x + 1) = f(4x - 5)$$

$$\Rightarrow 3x = f(4x - 5) + g(x + 1) \text{ elde edilir.}$$

Elde edilen eşitlikte $f(3)$ ve $g(3)$ değerlerinin toplamını hesaplamak için $x = 2$ yazılır.

$$3 \cdot 2 = f(4 \cdot 2 - 5) + g(2 + 1)$$

$$6 = f(3) + g(3) \Rightarrow (f + g)(3) = 6 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde 8

Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için $f(x) = x + 1$ ve $(2f + g)(x) = x^2 + 2x - 2$ 'dir.

Buna göre $g(2)$ değerini bulunuz.

4. Uygulama



Fonksiyonlarda Çarpma ve Bölme İşlemleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x + 3$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar için verilen tabloyu örneklerdeki gibi doldurunuz.

	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
$f(x)$	$f(1) = 1$			
$g(x)$	$g(1) = 2$			
$f(x) \cdot g(x)$				
$\frac{f(x)}{g(x)}$				





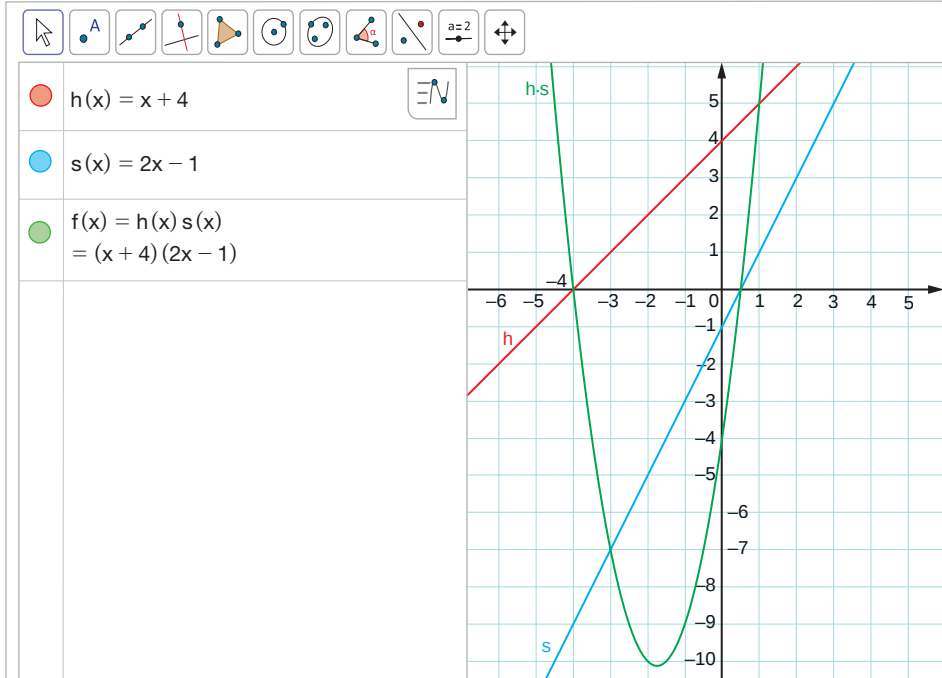
- b) Tablodan elde ettiğiniz sonuçları inceleyerek, f ve g fonksiyonları kullanılarak çarpma ve bölme işlemlerinin tanımlanıp tanımlanamayacağına ilişkin fikirlerinizi yazınız. Elde ettiğiniz fikirleri sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

- c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ve $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ eşitliklerinden yararlanarak çarpma ve bölme işlemlerine karşılık gelen cebirsel ifadeleri bulunuz.

2. Matematik yazılımında aşağıdaki adımları uygulayarak $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x + 4$ ve $s: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x) = 2x - 1$ şeklinde tanımlı fonksiyonların ve bu fonksiyonlarla yapılan işlemler sonucunda oluşan $f(x) = (h \cdot s)(x)$ ve $g(x) = \left(\frac{h}{s}\right)(x)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonların grafiklerini çizin ve bu grafikleri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- a) 1. adım: Giriş bölümüne $h(x) = x + 4$ yazarak grafiğini çizin.
 2. adım: Giriş bölümüne $s(x) = 2x - 1$ yazarak grafiğini çizin.
 3. adım: Giriş bölümüne $f(x) = (h \cdot s)(x)$ yazarak grafiğini çizin.

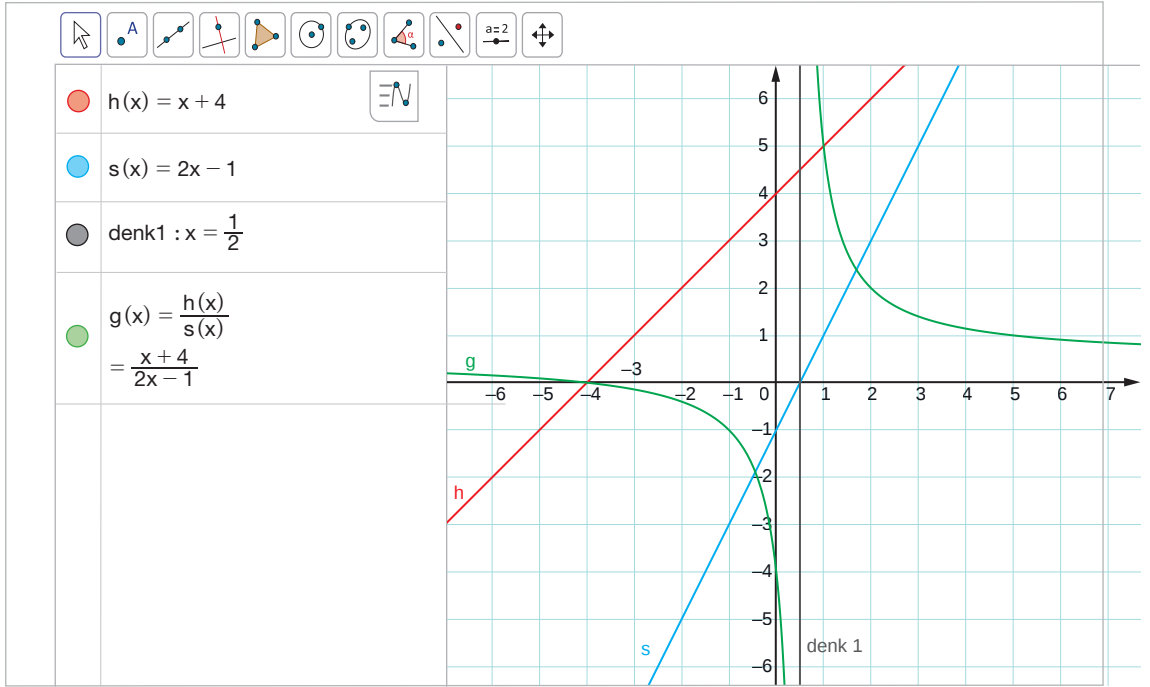
Verilen adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.





- b) 1. adım: Giriş bölümüne $h(x) = x + 4$ yazarak grafiğini çizin.
2. adım: Giriş bölümüne $s(x) = 2x - 1$ yazarak grafiğini çizin.
3. adım: Giriş bölümüne $x = \frac{1}{2}$ yazarak doğruyu çizin.
4. adım: Giriş bölümüne $g(x) = \frac{h(x)}{s(x)}$ yazarak grafiğini çizin.

Verilen adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



- c) h , s , $h \cdot s$ ve $\frac{h}{s}$ fonksiyonlarında oluşan değişimi hem elde ettiğiniz grafikler üzerinden hem de cebirsel olarak değerlendiriniz.

3. Yaptığınız çalışmalardan yola çıkarak iki fonksiyona yapılan çarpma ve bölme işlemleri sonucunda yeni fonksiyonların elde edilebilmesi ile bu iki fonksiyonun tanım kümelerinin ilişkisini hem sözel hem de cebirsel olarak ifade ediniz.

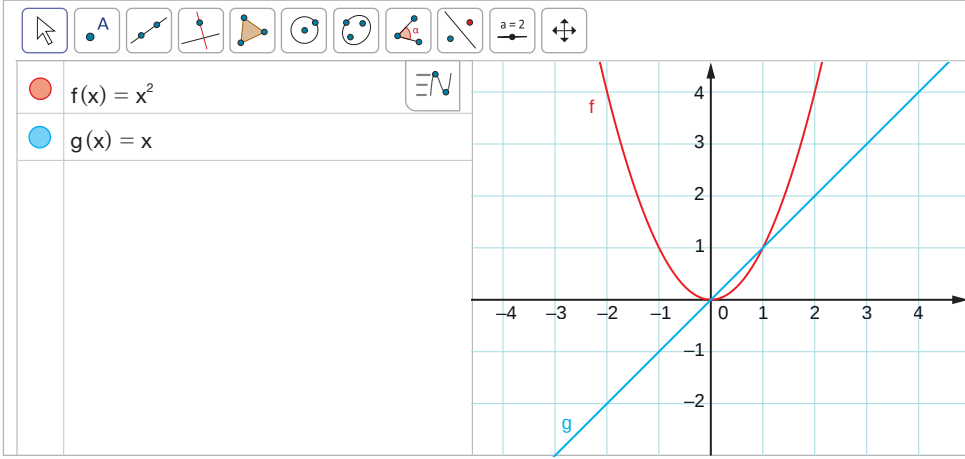
12. Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar verilmiştir.

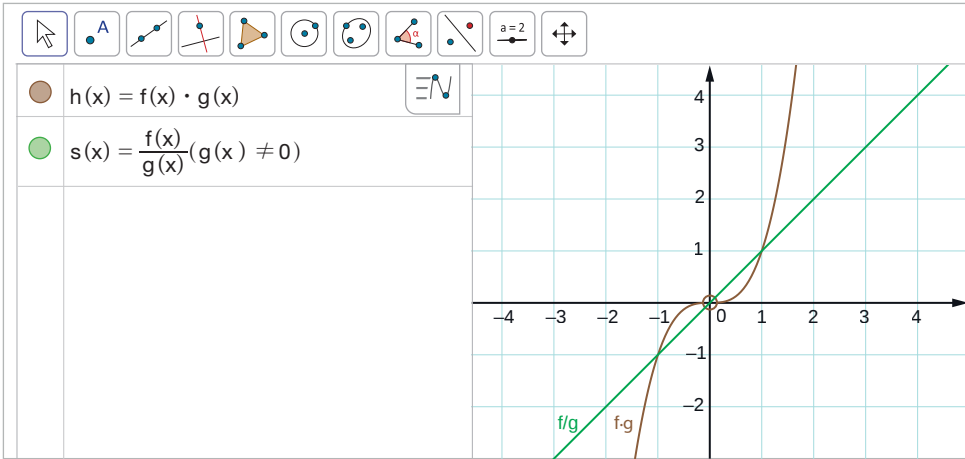
Buna göre $f \cdot g$ ve $\frac{f}{g}$ fonksiyonlarının grafiklerini matematik yazılımı kullanarak çiziniz ve bu fonksiyonların f ve g fonksiyonlarının grafiklerine göre nasıl bir yapısal değişim gösterdiğini yorumlayınız.

Çözüm

Grafik 1'de f ve g fonksiyonlarının Grafik 2'de ise $f \cdot g$ ve $\frac{f}{g}$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Grafik 1



Grafik 2

Grafik 1'de f fonksiyonunun parabolik, g fonksiyonunun doğrusal olduğu görülür. Grafik 2'de f ve g fonksiyonlarının çarpımı olan fonksiyon $\mathbb{R}$ de tanımlı $h(x) = (f \cdot g)(x) = x^3$ şeklinde olup yapısı f ve g den farklı olan bir eğri oluşturur. Genel olarak çarpım sonucu oluşan fonksiyonlar çarpımı oluşturan fonksiyonların yapısından farklı olur.

Grafik 2'de f nin g ye bölümünden oluşan fonksiyon $\mathbb{R} - \{0\}$ da tanımlı $s(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x} = x$, şeklinde bir fonksiyon olup bu fonksiyon doğrusal bir fonksiyondur ve $x = 0$ 'da tanımsızdır.

Sıra Sizde 9

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. f ve g gerçekte sayılarda tanımlı fonksiyonlar olmak üzere $(f + g)(x) = x^2 + 3x$ ve $(f - g)(2x) = 2x + 1$ eşitlikleri verilmiştir.

Buna göre $(f \cdot g)(2)$ değerini hesaplayınız.

2. $f: (-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 8$ ve $g: (-1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 5$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar veriliyor.

Buna göre $f \cdot g$ ve $\frac{f}{g}$ fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümelerini bulunuz, matematik yazılım programında grafiklerini çiziniz.

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

**13. Örnek**

Ahsen ve Işıl, farklı şehirlerde üniversite eğitimi gördükleri için her gün mobil bir uygulama üzerinden uzun süreli sesli görüşmeler yapmaktadır. Bu uygulama, görüşme süresince genel ağdan veri kullanmakta ve her 1 dakikalık görüşme için yaklaşık 5 MB veri harcamaktadır. Yüksek telefon faturasını azaltmak için operatör değiştirmek isteyen Ahsen ve Işıl, aşağıdaki tabloda yer alan iki farklı operatöre ait ücretlendirme bilgilerini incelemektedir.

Operatörler	Aylık Sabit Ücret (TL)	Kullanılan Her 1 MB İçin Ek Ücret (TL)
A	150	0,20
B	200	0,15

Buna göre

- Ahsen'in A operatöründe mobil uygulama üzerinden aylık 180 dakikalık görüşme gerçekleştirmesi durumunda ödeyeceği ücreti bulunuz.
- Ahsen'in A operatöründe, Işıl'ın B operatöründe mobil uygulama üzerinden aylık t dakikalık görüşmelerinin toplam ücretini veren r fonksiyonunu bulunuz.
- Ahsen'in A operatöründe, Işıl'ın B operatöründe mobil uygulama üzerinden aylık 240 dakikalık görüşme gerçekleştirilmesi durumunda oluşacak ücret farkının TL cinsinden pozitif değerini bulunuz.



Çözüm

1. Görüşme süresi t (dakika) olmak üzere $f(t) = 5t$ şeklinde tanımlı fonksiyon süreye bağlı veri kullanımını gösterir. Kullanılan veri miktarı x olmak üzere A operatöründe kullanılan veri miktarına bağlı ücret fonksiyonu $g(x) = 0,2x + 150$ olmaktadır. Görüşme süresine bağlı ücret fonksiyonu ise $(g \circ f)(t) = g(f(t)) = 0,2(5t) + 150 = t + 150$ olarak elde edilir. Ahsen 180 dakikalık görüşme için $(g \circ f)(180) = 180 + 150 = 330$ TL ücret öder.
2. Ahsen'in A operatöründe mobil uygulama üzerinden aylık t dakikalık görüşmesinin ücretini veren fonksiyon $(g \circ f)(t) = t + 150$ 'dir.
Işıl'ın kullandığı veri miktarı x olmak üzere B operatöründe kullanılan veri miktarına bağlı ücret fonksiyonu $h(x) = 0,15x + 200$ olmaktadır. Geçen süreye bağlı ücret fonksiyonu ise $(h \circ f)(t) = h(f(t)) = 0,15(5t) + 200 = 0,75 \cdot t + 200$ olarak elde edilir. Buradan $r(t) = g \circ f(t) + (h \circ f)(t) = t + 150 + 0,75 \cdot t + 200 = 1,75 \cdot t + 350$ olur.
3. Ahsen'in A operatöründe, Işıl'ın B operatöründe mobil uygulama üzerinden aylık 240 dakikalık görüşmeleri sonucunda oluşan ücret farkını veren fonksiyon k olmak üzere $k(t) = |(g \circ f)(t) - (h \circ f)(t)| = |t + 150 - (0,75 \cdot t + 200)| = |0,25 \cdot t - 50|$ olur. Buradan $t = 240$ için $k(t) = 10$ TL olarak bulunur.

Fonksiyonlarda dört işlem özelliklerinin yorumlanmasına ilişkin sorulardan oluşan Çalışma Kağıdı'na ve Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.



Sıra Sizde 10

Bir kimya laboratuvarında yürütülen deneyde ortam sıcaklığı ile reaksiyon süresi arasında bir ilişki olduğu gözlemlenmiştir. Deney ortamında sıcaklık arttıkça maddenin reaksiyon süresi azalmaktadır. Deney ortamının sıcaklığına x ($^{\circ}\text{C}$) bağlı reaksiyon süresi t (sn.) arasındaki bağıntı $t(x) = \frac{720}{x+3}$ ($x > 0$) şeklinde modellenmiştir. Laboratuvar, bu deneyin maliyetini reaksiyon süresine göre hesaplamakta; her bir saniye için 50 TL ücretlendirme yapmakta ve deney başına sabit 2000 TL ücret almaktadır. t reaksiyon süresine bağlı deneyin maliyeti (TL) ise g fonksiyonu ile modellenmiştir.

Buna göre

1. Uygun deney ortamı sıcaklığının 9°C olması durumundaki reaksiyon süresini ve deney için ödenecek para miktarını TL cinsinden bulunuz.
2. Uygun deney ortamı sıcaklığının 9°C 'tan 17°C 'a çıkarılması durumunda deneyin TL cinsinden maliyetinin ne kadar değişeceğini bulunuz.

Kontrol Noktası

$A \cap B \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: B \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\forall x \in A \cap B$ olmak üzere

- $f + g: A \cap B \rightarrow \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $f - g: A \cap B \rightarrow \mathbb{R}, (f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $f \cdot g: A \cap B \rightarrow \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g}: A \cap B \rightarrow \mathbb{R}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, (g(x) \neq 0)$ olur.

Ek soruların yer aldığı 3. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.
(İçerik: Fonksiyonlarda Dört İşlem)



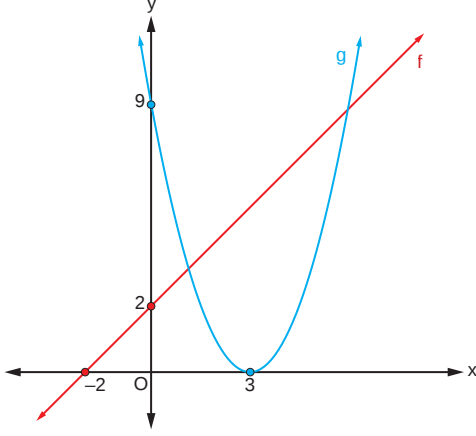
Alıştırmalar

- Gerçek sayılarda $g(x) = 2x^2 - 3$ ve $(3f - 2g)(x) = 7x^2 - 6x + 4$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar veriliyor. Buna göre $f(1)$ değerini bulunuz.
- $f: [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x - 1$ ve $g: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -2x + 3$ şeklinde tanımlı f ve g fonksiyonları veriliyor. Buna göre $f + g$ fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız, tanım ve görüntü kümesini bulunuz.
- $A = [0, 6], B = [1, 9]$ kümeleri veriliyor. $f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: B \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 2x + 1, g(x) = 4x - 3$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar veriliyor. Buna göre $f \cdot g$ fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız, tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

4. Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları $(f + g)(x) = x^2$ ve $(f - 2g)(3x) = 2x + 1$ eşitliklerini sağlamaktadır.

Buna göre $(f \cdot g)(3)$ ifadesinin değerini bulunuz.

5.



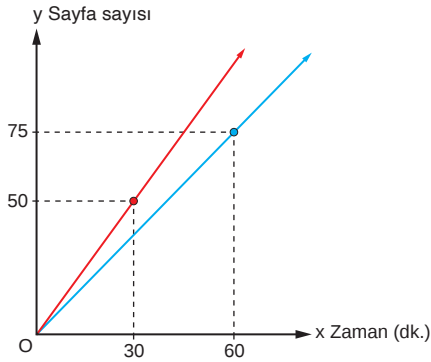
Yanda dik koordinat sisteminde $y = f(x)$ doğrusal fonksiyonu ile ikinci dereceden $y = g(x)$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiği verilmiştir.

Buna göre

a) $f \cdot g$ fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

b) $(f \cdot g)(5)$ ifadesinin değerini bulunuz.

6.



Yanda iki aracın 80 dakika boyunca aldığı yolun zamana bağlı doğrusal değişimini gösteren grafikler yer almaktadır.

Buna göre iki aracın x dakika sonunda aldığı toplam yolu ifade eden h fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

5. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

Aşağıda cevaplamamız için temaya ait farklı soru tiplerinde 16 adet soru bulunmaktadır.

1-13. bilgi ve becerileri ölçen soruları cevaplayınız.

1. İçinde bir miktar gaz bulunan bir balona sabit hızla gaz dolumu yapılmaktadır.

t , zaman (dakika) olmak üzere balonun içindeki gazın zamana bağlı kütlesi (g) $m(t) = 12t + 120$ şeklinde tanımlı m fonksiyonu ve zamana bağlı balon içindeki gazın hacmi (m^3) $v(t) = 3t + 10$ şeklinde tanımlı v fonksiyonu ile modellenmiştir.

(Maddenin yoğunluğu (d), kütlesinin hacmine oranıyla bulunur.)

Buna göre

- a) Balon içindeki gazın zamana bağlı yoğunluğunu veren d fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

- b) 10. dakikada balon içindeki gazın yoğunluğunun kaç g/m^3 olacağını bulunuz.

- c) Kaçırıncı dakikada balon içindeki gazın yoğunluğunun $4,5 g/m^3$ olacağını bulunuz.

2. Bir cam fabrikası, ürettiği x adet bardak için üretim maliyetini (TL) $m(x) = 10x + 5$ olarak modellemiştir. Her bir bardağın satış fiyatı 20 TL olarak belirlenmiştir.

Buna göre

- a) Satılan x adet bardak için TL cinsinden gelir fonksiyonu olan g nin cebirsel temsilini yazınız.

- b) Satılan x adet bardaktan elde edilecek TL cinsinden kâr fonksiyonu olan k nin cebirsel temsilini yazınız.

- c) Satılan 100 adet bardaktan elde edilecek kârın kaç TL olduğunu bulunuz.

- ç) Üretilen x adet bardak için bardak başına düşen birim maliyet fonksiyonu olan b nin cebirsel temsilini yazınız.

3. Özel yapım bir yük taşıma aracının hızı, taşıdığı yüke bağlı olarak belirlenmektedir. x , aracın yük miktarı (ton) olmak üzere aracın hızı (km/sa.) $v(x) = 20 + \frac{60}{x}$ olarak belirlenmektedir. Aracın hızına bağlı olarak deposundaki yakıtın tükenme süresi değişmektedir.

Aracın hızı v olmak üzere aracın hızına bağlı olarak deposundaki yakıtın tükenme süresi (sa.) $t(v) = \frac{100 - v}{2}$ şeklinde tanımlı t fonksiyonu ile modellenmiştir. Araç, yakıtı tükenince durmaktadır.

Buna göre

- a) Aracın yüküne bağlı olarak deposundaki yakıtın tükenme süresini veren f fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

- b) Aracın yüküne bağlı olarak gidebileceği yolu veren h fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

- c) Aracın 10 ton yük taşıması durumunda kaç km yol gidebileceğini bulunuz.

4. Altının gramının ham madde maliyeti 3000 TL, platinin gramının ham madde maliyeti 1200 TL olduğu bir zamanda bir sarraf, altın ile platini karıştırarak elde ettiği alaşımdan takı üretmektedir. Üretilen takıların işçilik maliyeti, takının içerdiği altın ve platin oranlarına göre değişmektedir. Takının içerdiği altın yüzdesi x olmak üzere 10 g ağırlığındaki bir takının işçilik maliyeti $f(x) = \frac{x^2}{10}$ şeklinde modellenmiştir. Ham madde maliyeti ile işçilik maliyeti toplam maliyeti oluşturmaktadır. Sarraf, ürettiği takıları toplam maliyetinin %20 fazlasına satmaktadır.

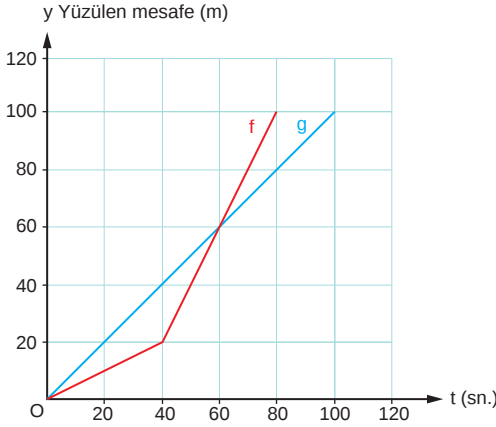
Buna göre

- a) Altın yüzdesine bağlı olarak 10 g ağırlığındaki takının ham madde maliyet fonksiyonu olan h nin cebirsel temsilini yazınız.

- b) Altın yüzdesine bağlı olarak 10 g ağırlığındaki takının toplam maliyet fonksiyonu olan m nin cebirsel ifadesini yazınız.

- c) %80 altın içeren 10 g ağırlığındaki bir takının satış fiyatını TL cinsinden bulunuz.

5. Dünya paralimpik yüzme şampiyonasında 100 metre kadınlar serbest yüzmede yarışan millî yüzücü Defne Kurt ile yarışmadaki diğer sporculardan birinin zamana bağlı yüzülen mesafe sırasıyla f ve g fonksiyonları ile modellenmiştir. f ve g fonksiyonlarına ait grafikler aşağıda verilmiştir.



Verilenlere göre f - g fonksiyonu ile ilgili soruları cevaplayınız.

- $f - g$ fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.
- $f - g$ fonksiyonunun grafik temsilini çiziniz.
- $f - g$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.
- $f - g$ fonksiyonunun pozitif ve negatif değerli olduğu aralıkları bulunuz.

6. Bilgisayarda çalıştırılan bir oyunun çözünürlüğü piksel (p) cinsinden 540p, 720p, 900p, 1080p, 1260p, 1440p olarak seçilebilmektedir. Oyunun çözünürlüğü arttıkça bilgisayarın ekran kartının çalışma hızı da artmaktadır. Ekran kartının çalışma hızı arttıkça da ekran kartının elektrik tüketimi artmaktadır. x , çalıştırılan oyunun çözünürlüğü olmak üzere ekran kartının çalışma hızı (Mhz, Megahertz) $h(x) = \frac{4}{3}x + 300$ şeklinde modellenmiştir. h , ekran kartının çalışma hızı olmak üzere ekran kartının kullandığı elektrik tüketimi (W, Watt) $t(h) = \frac{1}{10}h + 15$ şeklinde modellenmiştir.

Buna göre

- Bilgisayarda çalıştırılan oyunun çözünürlüğüne bağlı ekran kartının elektrik tüketimini veren f fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.
- Bir oyunun 720p çözünürlükte çalıştırılması durumunda ekran kartının elektrik tüketiminin kaç W olacağını bulunuz.
- 1080p çözünürlükte çalıştırılan bir oyunun çözünürlüğünün 1440p ye çıkarılması durumunda ekran kartının elektrik tüketimindeki artışın kaç W olacağını bulunuz.

7. Bir kafe işletmecisi olan Utkan, gün içindeki kahve satışlarının değişimini incelemiştir. Kafe 10.00 ile 22.00 saatleri arasında hizmet vermektedir. x , kafenin saat 10.00'dan itibaren açık kaldığı süre (sa.) olmak üzere açılış saatinden itibaren satılan kahve sayısı $f(x) = x^2 + 10x + 40$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu ile modellenmektedir. Örneğin saat 13.00'e kadar kafe 3 saat açık kalmış olacağından saat 13.00'e kadar kafenin toplam kahve satışı $f(3) = 79$ adet olacaktır. Bir kahvenin fiyatı 60 TL'dir.

Buna göre

- a) **Saat 11.00 ile 17.00 arasında kafede satılan kahve sayısını bulunuz.**
- b) **Kafenin bir gün boyunca kahve satışından elde ettiği cironun kaç TL olduğunu bulunuz.**
- c) **Kafenin açılış saatinden itibaren açık kaldığı süreye bağlı olarak kahve satışından elde ettiği ciroyu veren h fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.**

8. İşine taksiyle gitmek isteyen Volkan'ın yaşadığı şehirde bir taksideki taksimetre uygulamasında ücret, gidilen mesafeye göre hesaplanmaktadır. Taksimetrenin sabit ücreti 100 TL'dir. Ayrıca taksimetreye, gidilen her 1 km için 40 TL ücret yansıtılmaktadır. x , gidilen yol (km) olmak üzere taksi ücreti f fonksiyonu ile modellenmektedir. Taksimetre ücretine %18 KDV eklenerek müşteriye toplam ücret yansıtılmaktadır. İşe gitmek isteyen Volkan, taksi çağırıyor.

Buna göre

- a) **Volkan, her gün evinden iş yerine taksi kullanarak gitmekte ve bunun için taksi şoförüne 1062 TL ücret ödemektedir. Volkan'ın evi ile iş yeri arasındaki mesafenin kaç km olduğunu bulunuz.**
- b) **Hafta sonu tarihî mekânları gezmek isteyen Volkan, sırasıyla 12 km ve 18 km'lik iki farklı mesafe için taksi hizmetinden yararlanmıştır. Volkan'ın bu mesafeler için ödediği toplam taksi ücretinin kaç TL olacağını hesaplayınız.**

9. Bir yemek işletmesindeki sipariş sayısı arttıkça mutfaktaki hazırlık süresi uzamaktadır.

x , sipariş sayısı olmak üzere siparişin hazırlık süresi (dk.) $h(x) = x^2 - 3x + 15$ şeklinde tanımlı h fonksiyonu ile modellenmektedir.

Siparişin hazırlık süresi uzadıkça teslim süresi de uzamaktadır.

Siparişin teslim süresi (dk.)

$t(h) = 1,2 \cdot h + 10$ şeklinde tanımlı t fonksiyonu ile modellenmektedir.

Buna göre

- a) 8 siparişin teslim süresini hesaplayınız.

- b) Siparişlerin teslim süresinin 40 dakikayı geçmemesi için alınabilecek sipariş sayısının en çok kaç adet olması gerektiğini bulunuz.

10. Bir spor salonunun fiyat tarifi şöyledir:

- Üyelik süresi kadar aylık belli bir ücret ödenir. (1 ay = 300 TL)
- Kayıt olurken bir defaya mahsus 100 TL giriş ücreti alınır.
- Öğrencilere toplam tutar üzerinden %20 indirim yapılır.

Buna göre

- a) x aylık üyelik oluşturan bir öğrencinin ödeyeceği indirimli toplam ücreti ifade eden h fonksiyonunu yazınız.

- b) 5 aylık üyelik oluşturan Hatice Hanım ve öğrenci Melike'nin ödeyecekleri toplam ücretin kaç TL olacağını bulunuz.

11. Öğrencilerini sınavla alan bir kolej, öğrencilerine sınavdaki doğru cevap sayılarına bağlı olarak indirim uygulamaktadır.

100 soruluk sınavdan alınan kolej puanı, doğru cevap sayısına (x) göre modellenen f fonksiyonu $f(x) = 40 \cdot \sqrt{x + 44} + 20$ şeklinde tanımlanmıştır. 300 puan ve üzeri alan öğrencilere sınavdan aldığı puana (m) göre yüzde $g(m) = \frac{m}{5}$ oranında indirim uygulanmaktadır.

Buna göre

- a) Sınavda 37 soruyu doğru cevaplayan Utku'nun yüzde kaç indirim kazanacağını bulunuz.
- b) Defne'nin en az %84 ve en fazla %92 indirim kazanabilmesi için doğru cevaplaması gereken soru sayısının alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

12. Bir dijital eğitim platformunda bir videonun aldığı beğeni sayısı x olmaktadır. ($x \in \mathbb{N}$) Videonun aldığı beğeni sayısına bağlı videonun görünürlük puanı $f(x) = \log_3(x + 10)$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu ile hesaplanmaktadır. k görünürlük puanına göre videoda reklam gösterilme sıklığı $g(k) = 5k$ şeklinde tanımlı g fonksiyonu ile hesaplanmaktadır.

Buna göre

- a) Bir videonun aldığı beğeni sayısına bağlı olarak videoda reklam gösterilme sıklığını veren bileşke fonksiyonunun cebirsel ifadesini yazınız.
- b) Beğeni sayısı 71 olan bir videoda reklam gösterilme sıklığını bulunuz.
- c) Reklam gösterilme sıklığı 25 olan bir videonun beğeni sayısını bulunuz.

13. Bir markanın mobil uygulamasından gelen bildirimi açan İnci, aşağıdaki görselde verilen indirim kampanyasının başladığını görmüştür.

İlk alışverişinizde "Hoş geldiniz!" hediyesi olarak 10 puan ve alışverişinizin %5'i kadar puan kazanın.
Sonraki alışverişte puanınızın 2 katı kadar indirim kazanın.

Yapılan her x TL'lik ilk alışveriş için kazanılacak puanı veren fonksiyon f , kazanılan puanları sonraki alışverişte TL indirimine dönüştüren fonksiyon g olmaktadır.

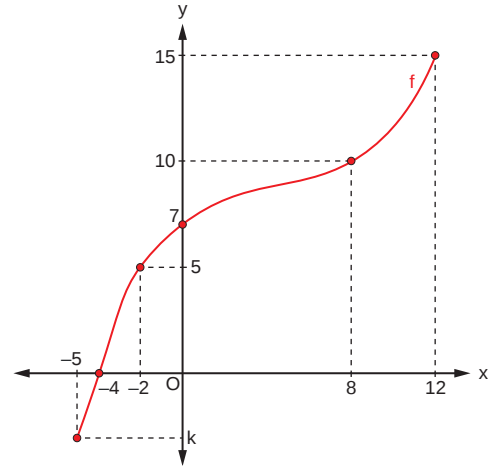
Buna göre

- a) x TL tutarındaki ilk alışverişe karşılık sonraki alışverişte kazanılacak indirim miktarını veren h fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

- b) 300 TL'lik ilk alışverişe karşılık sonraki alışverişte kaç TL indirim kazanılacağını bulunuz.

14-16. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

14. f fonksiyonuna ait grafik aşağıda verilmiştir.

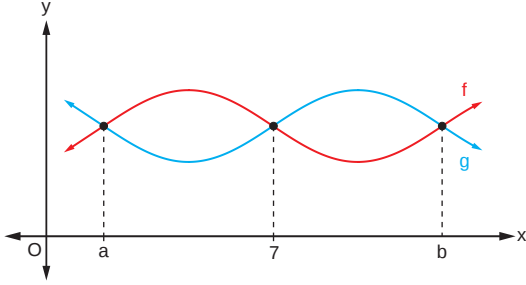


f fonksiyonu ve uygun tanım ve değer kümesine sahip $g(x) = -x$ şeklinde tanımlı g doğrusal fonksiyonu kullanılarak $f \circ g$ bileşke fonksiyonu tanımlanmıştır. $f \circ g$ bileşke fonksiyonunun tanım kümesi A ve görüntü kümesi B olmak üzere $A \cap B = [m, n]$ ve $f \circ g$ bileşke fonksiyonunun maksimum noktası ile minimum değerinin toplamı -15 olmaktadır.

Buna göre $m + n \cdot k$ ifadesinin gerçekte sayı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -20 B) -18 C) -16
D) -15 E) -12

15. a ve b birer tam sayı olmak üzere gerçekte sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonlarının dik koordinat sistemindeki grafikleri aşağıda verilmiştir.



Verilen grafiklere göre $[a, b]$ nda

$(f - g)(x) > 0$ şartını sağlayan 3 tane tam sayı değeri $(f - g)(x) < 0$ şartını sağlayan 5 tane tam sayı değeri vardır.

Buna göre $f(x) = g(x)$ şartını sağlayan x gerçekte sayı değeri toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 17 B) 19 C) 21
D) 23 E) 25

16. Yağmur, bileşke fonksiyonların nitel özellikleriyle ilgili bir önermeyi doğrulamak için aşağıdaki örnek durumu yazmıştır.

Örnek durum: " $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -2x + 5$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar için $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = -6x + 5$ olur."

Yağmur'un yazdığı örnek durum aşağıdaki önermelerden hangisini doğrulamak için yazılmış olabilir?

- A) f artan fonksiyon ve g azalan fonksiyon ise $g \circ f$ azalan fonksiyon olur.
B) f azalan fonksiyon ve g artan fonksiyon ise $g \circ f$ azalan fonksiyon olur.
C) f tek fonksiyon ve g çift fonksiyon ise $g \circ f$ çift fonksiyon olur.
D) f tek fonksiyon ve g tek fonksiyon ise $g \circ f$ tek fonksiyon olur.
E) f artan fonksiyon ve g artan fonksiyon ise $g \circ f$ artan fonksiyon olur.

Tema ile ilgili daha fazla soruya yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

